

Überlagerungen kleinster Blätterzahl projektiver Kurven über dem $\mathbb{P}^1(k)$

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Michael Lippa
aus Bochum

Bochum 1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546603_0032

ÜBERLAGERUNGEN KLEINSTER BLÄTTERZAHL
PROJEKTIVER KURVEN ÜBER DEM $\mathbb{P}^1(k)$

D I S S E R T A T I O N

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum



von

Michael Lippha
aus Bochum

Bochum 1977



Dissertation eingereicht am 24. Januar 1977

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juni 1977

Referent: Prof. Dr. U. Storch

Korreferent: Prof. Dr. G. Scheja

Inhaltsverzeichnis

	Einleitung	1
§ 1	Einige grundlegende Ergebnisse	8
§ 2	Eigenschaften des Hilbert- und des Picardschemas	23
§ 3	Spezielle Unterschemata des "Schemas von Divisoren" einer Kurve	42
§ 4	Natürliche Einbettungen von Kurven in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^m$	54
	Anhang: Bemerkung zur Bedeutung des Unterschemas H_g^v für das Modulproblem für Kurven	66
§ 5	Überlagerungen des $\mathbb{P}^1(k)$ durch Kurven über k mit minimaler Blätterzahl	78
§ 6	Beispiele von Kurven über einem Körper	87
	Literaturverzeichnis	109

Einleitung

In der Funktionentheorie betrachtet man Konkretisierungen abstrakter kompakter Riemannscher Flächen, also Paare (R, z) mit einer kompakten Riemannschen Fläche R und einer nicht-konstanten meromorphen Funktion z auf R , d.h. Überlagerungen Riemannscher Flächen über der Sphäre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit einer Blätterzahl n . Besonderes Interesse kommt den Konkretisierungen mit möglichst kleiner Blätterzahl zu. In [19] zeigt Th. Meis mit analytischen Methoden, daß sich jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit höchstens $(g+2)/2$ oder $(g+3)/2$ Blättern dem $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ überlagern läßt.

Der Konkretisierung (R, z) entspricht eine endliche Körpererweiterung $\mathbb{C}(z) \longrightarrow K$, wobei K den Körper der meromorphen Funktionen auf R bezeichnet, mit $[K: \mathbb{C}(z)] = n = (\text{Blätterzahl der zugehörigen Überlagerung})$. Deshalb ist die Frage nach Überlagerungen mit minimaler Blätterzahl letztlich eine algebraische Frage:

Sei k ein Körper und K ein endlich-erzeugter Erweiterungskörper von k mit $\text{tr grad}_k K = 1$. Wie muß $f \in K$ gewählt werden, damit der Körpergrad $[K: k(f)]$ möglichst klein ist?

Dieses Problem wurde schon von Hensel-Landsberg in [11] untersucht, wobei sie ähnliche Betrachtungen von Brill und M. Nöther in [3] moderner formulierten. Sie bewiesen im "allgemeinen

Fall" die obige Abschätzung für die minimale Blätterzahl, ohne jedoch zu klären, wann dieser vorliegt, wobei Brill und Nöther mehr geometrisch über algebraische Kurven argumentierten, während Hensel und Landsberg algebraisch-zahlentheoretisch die genannte Körpererweiterung studierten.

In den letzten Jahren erschien eine Reihe von Arbeiten, die die Frage nach der Existenz bestimmter Divisoren auf projektiven, glatten, zusammenhängenden algebraischen Kurven über einem algebraisch-abgeschlossenen Körper zum Thema haben ([13], [14], [18]). Aus diesen Überlegungen folgt die genannte Abschätzung für die minimale Blätterzahl aufgrund der folgenden äquivalenten Aussagen:

Sei $X \longrightarrow \text{Spek } k$ eine Kurve mit den obigen Eigenschaften über dem algebraisch-abgeschlossenen Körper k . Mit $R(X)$ wird der rationale Funktionenkörper von X bezeichnet. Dann sind äquivalent:

- (i) Es gibt ein $f \in R(X)$, $f \notin k$, so daß $[R(X) : k(f)] \leq d$ ist.
- (ii) Es gibt ein $f \in R(X)$, $f \notin k$, so daß für den Nennerdivisor N_f von f $\text{grad } N_f \leq d$ gilt.
- (iii) Es gibt einen positiven Divisor D auf X mit $\text{grad } D = d$ und $\dim D \geq 2$.

In dieser Arbeit sollen nun andere Methoden angewandt und dem Beweisgang von Meis gefolgt werden, um einen algebraischen Beweis dafür zu erbringen, daß sich jede projektive, glatte,

zusammenhängende algebraische Kurve vom Geschlecht g über einem algebraisch-abgeschlossenen Körper mit höchstens $(g+2)/2$ bzw. $(g+3)/2$ Blättern dem $\mathbb{P}^1(k)$ überlagern läßt. Diese Aufgabe erscheint schon deshalb als sinnvoll, weil sich die Meis'sche Beweisidee durch besondere Anschaulichkeit auszeichnet. Außerdem ergeben sich gute Anwendungsmöglichkeiten der Modul-Theorie algebraischer Kurven.

Statt einzelne Kurven über k zu untersuchen, betrachten wir "Familien" von Kurven gleichen Geschlechts:

Definition: Sei S ein lokal-noethersches Schema. Eine Kurve über S vom Geschlecht g ist ein S -Schema X , dessen Strukturmorphismus $\pi : X \longrightarrow S$ glatt und eigentlich ist und irreduzible Kurven vom Geschlecht g als geometrische Fasern hat. Dabei ist eine Kurve ein 1-dimensionales projektives Schema, dessen Halme sämtlich Macaulay-Ringe sind.

Es folgt unmittelbar:

- 1) Der Strukturmorphismus π ist insbesondere separiert, flach und von endlichem Typ.
- 2) Die geometrischen Fasern von $\pi : X \longrightarrow S$ sind projektive, glatte, zusammenhängende algebraische Kurven vom Geschlecht g . Dann gilt dies auch für die (schema-theoretischen) Fasern.
- 3) Wie wir später (§ 4) sehen werden, ist die invertierbare Garbe der Kählerschen Differentialformen $\Omega_{X/S}$ π -reich, somit ist π ein quasi-projektiver Morphismus. Ist S sogar

noethersch, dann ist π auch projektiv, denn auf einem quasi-kompakten Schema ist jeder quasi-projektive und eigentliche Morphismus bereits projektiv.

Diese Verallgemeinerung des Kurvenbegriffs ist notwendig, um als Hilfsmittel repräsentierbare Funktoren anwenden und unsere Aussagen in der Sprache der Modultheorie von Grothendieck formulieren zu können. Dabei werden wir wie folgt vorgehen:

In den §§ 1 und 2 werden hauptsächlich das Hilbert- und das Picardschema definiert und einige wesentliche Eigenschaften dieser Objekte zusammengestellt. Außerdem werden relative Divisoren eingeführt und berichtet, daß diese durch ein offenes Unterschema des Hilbertschemas parametrisiert werden können. Die Beweise finden sich meistens in Arbeiten von Grothendieck. In § 2 wird noch auf den Zusammenhang zwischen Hilbertschema und symmetrischem Produkt, sowie auf den kanonischen Morphismus des Schemas der relativen Divisoren in das Picardschema eingegangen.

Der § 3 enthält eine natürliche Verallgemeinerung der Determinantenideale zu Determinantenidealgarben. Es werden einige einfache Eigenschaften solcher Idealgarben und der von ihnen beschriebenen abgeschlossenen Unterschemata bewiesen. Dies wird angewandt auf das Hilbertschema einer Kurve $\pi: X \longrightarrow S$ und gezeigt, daß man durch geeignete Determinantenidealgarben solche abgeschlossenen Unterschemata definieren kann, zu deren K-wertigen Punkten

(K ist ein Körper) auf den entsprechenden K -rationalen Fasern von $X \longrightarrow S$ gerade positive Divisoren mit bestimmtem Grad und bestimmter Dimension gehören. Insbesondere läßt sich die Dimension dieser Unterschemata nach unten abschätzen.

Im § 4 wird wie bei Mumford [20] die Existenz des universellen Schemas $\mathbb{H}_g^\vee$ der $\vee$ -kanonisch eingebetteten Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ bewiesen. (Der Begriff der $\vee$ -kanonischen, bzw. $\vee$ -kanonisch eingebetteten Kurve wird im § 4 eingeführt.) Für das folgende ist nur wichtig, daß es zu jeder Kurve $X \longrightarrow \text{Spek } K$ (K ist ein Körper) einen K -wertigen Punkt von $\mathbb{H}_g^\vee$ gibt, so daß X isomorph ist zu der Faser $\text{Spek } K \times_{\mathbb{H}_g^\vee} V_g^\vee$ der universellen $\vee$ -kanonisch eingebetteten Kurve über $\mathbb{H}_g^\vee$.

In einem Anhang zu § 4 wird erläutert, wie man aus dem Schema $\mathbb{H}_g^\vee$ das grobe Modulschema $\underline{M}_g$ des Funktors $\mathcal{M}_g$ der Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht g über lokal-noetherschen Schemata erhält. Als Folgerung erhält man die Umkehrung einer Proposition in EGA II (4.1.4) und (4.2.7). Der Inhalt dieses Anhangs wird im weiteren Verlauf nicht benötigt.

Der § 5 enthält das wesentliche Ergebnis über die minimale Blätterzahl. Wir benutzen einen Satz von Deligne und Mumford [4], der besagt, daß das Schema $\mathbb{H}_g$ für $\vee = 3$, aufgefaßt als k -Schema $\mathbb{H}_g^0 = \mathbb{H}_g \times_{\mathbb{Z}} \text{Spek } k$, k algebraisch-abgeschlossener Körper, irreduzibel ist. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf die entsprechende Aussage für einen Grundkörper der Charakteristik 0.

Für diesen Fall sind aber nur analytische Beweise bekannt. Äußerst wünschenswert wäre es, diese Aussage auch für Grundkörper der Charakteristik 0 algebraisch zu beweisen. Dies ist die einzige Stelle, an der in dieser Arbeit analytische Methoden verwendet werden. Es wird nun bewiesen, daß auf jeder Kurve über $\text{Spek } k$ ein positiver Divisor D mit $\dim D \geq 2$ und $\text{grad } D = (g+2)/2$ bzw. $= (g+3)/2$ existiert, indem man zeigt, daß das Bild von $F_2(V_g^0, m)$ in H_g^0 bezüglich des Strukturmorphismus ganz H_g^0 ist. Dabei bezeichnet V_g^0 die universelle 3-kanonisch eingebettete Kurve über H_g^0 und $F_2(V_g^0, m)$ das abgeschlossene Unterschema des Hilbertschemas von $V_g^0 \longrightarrow H_g^0$, das positive Divisoren der Dimension ≥ 2 und vom Grad m beschreibt. Es ist $m = (g+2)/2$, falls g gerade ist und $m = (g+3)/2$ für ungerades g . Dazu muß man aber wissen, daß $F_2(V_g^0, m) \neq \emptyset$ ist und Punkte mit genügend kleiner Faserdimension enthält. Weiter wird ein Kriterium angegeben, wann sich eine Kurve über k dem $\mathbb{P}^1(k)$ mit genau d Blättern überlagern läßt.

Daß $F_2(V_g^0, m)$ die genannten Eigenschaften hat, wird durch Beispiele in § 6 gesichert. Allerdings habe ich geeignete Kurven nur für Grundkörper der Charakteristik $\neq 3$ gefunden. Außerdem werden Beispiele von Kurven angegeben, die sich mit minimaler bzw. der Blätterzahl m nicht separabel oder wild verzweigt dem $\mathbb{P}^1(k)$ überlagern lassen.

Die Bezeichnungen sind eng an EGA bzw. [26] angelehnt, allerdings wird anstatt von Präschema die Bezeichnung Schema benutzt. Schemata brauchen aber nicht separiert zu sein. Im übrigen sind alle Ringe kommutativ mit 1 und alle Ringhomomorphismen unitär.

Für die Themenstellung dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. Storch ganz herzlich danken. Ebenso gilt ihm und Herrn Prof. Dr. Sommer mein Dank für die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit.

Bochum, im Januar 1977

§ 1 Einige grundlegende Ergebnisse

In diesem Paragraphen werden einige Definitionen und Sätze aufgeführt, die im weiteren Verlauf als Hilfsmittel benutzt werden.

Wir betrachten einen Spezialfall der in EGA III § 7 entwickelten allgemeinen Theorie.

(1.1) Satz: Seien $f: X \longrightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus lokal-noetherscher Schemata und $\mathcal{F}$ ein kohärenter, über Y flacher $\mathcal{O}_X$ -Modul auf X . Für einen Punkt $y \in Y$ bezeichne X_y die (schematheoretische) Faser von X über y bezüglich f und $\mathcal{F}_y$ die von $\mathcal{F}$ auf X_y induzierte Garbe von Moduln. Ist für alle $y \in Y$

$$H^1(X_y, \mathcal{F}_y) = (0) ,$$

dann gilt:

- a) Es ist $f_*(\mathcal{F})$ ein lokal-freier $\mathcal{O}_Y$ -Modul
- b) "Direktes-Bild-Nehmen" bezüglich f kommutiert mit Basis-erweiterung: Ist $g: Y' \longrightarrow Y$ ein lokal-noethersches Y -Schema, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y' \times_Y X & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

kommutativ und der natürliche Homomorphismus

$$g^*(f_*(\mathcal{F})) \longrightarrow p_{1*}(p_2^*(\mathcal{F}))$$

ein Isomorphismus.

c) Ist insbesondere $Y' = \text{Spek } \mathfrak{A}(y)$ für ein $y \in Y$, so ist

$$(f_*(\mathcal{F}))_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathfrak{A}(y) \longrightarrow \Gamma(X_y, \mathcal{F}_y)$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung: Den natürlichen Homomorphismus erhält man aus den kanonischen Homomorphismen für $U \subset Y$ offen und affin:

$$\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(g^{-1}(U) \times_U f^{-1}(U), p_2^*(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(g^{-1}(U), p_{1*}(p_2^*(\mathcal{F}))),$$

wobei $h \longrightarrow 1 \otimes h$ auf offenen affinen Teilmengen gilt. Diese induzieren einen $\mathcal{O}_Y$ -Modul-Homomorphismus

$$f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow g_*(p_{1*}(p_2^*(\mathcal{F}))),$$

also auch

$$g^*(f_*(\mathcal{F})) \longrightarrow p_{1*}(p_2^*(\mathcal{F})).$$

Zum Beweis des Satzes wendet man EGA III (7.7.10) und (7.7.5) für $p = 1$ an und dann (7.8.4) für $p = 0$.

Für flache Basiserweiterungen läßt sich sehr leicht zeigen:

(1.2) Proposition: Seien X, Y, Y' beliebige Schemata, $f: X \longrightarrow Y$ ein separierter Morphismus endlichen Typs und $g: Y' \longrightarrow Y$ ein flacher Morphismus. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y' \times_Y X & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

kommutativ, und für jeden quasikohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{F}$ sind die $\mathcal{O}_Y$ -Moduln $p_{1*}(p_2^*(\mathcal{F}))$ und $g_*(f_*(\mathcal{F}))$ kanonisch isomorph.

Der Beweis beruht im wesentlichen darauf, daß bei flacher Erweiterung die Kohomologie-Moduln von $Y \times_Y X$ durch entsprechende Grundringerweiterung aus denen von X entstehen (vgl. EGA III (1.4.15)).

Bemerkung: Die Sätze (1.1) und (1.2) gelten entsprechend auch für höhere Bildgarben $R^q f_*(\mathcal{F})$.

Als nächstes erinnern wir an Definitionen und Existenzsätze im Zusammenhang mit dem Hilbertschema. Eine wichtige Rolle spielt dabei das Hilbertpolynom eines kohärenten Moduls.

Seien S ein noethersches Schema und X ein über S projektives Schema, das mit einer sehr reichen Garbe $\mathcal{O}_X(1)$ versehen ist. Für $s \in S$ ist die auf der Faser $X_s = X \times_S \text{Spek } \kappa(s)$ induzierte Garbe $\mathcal{O}_{X_s}(1)$ wieder sehr reich. Man ordnet nun einem kohärenten $\mathcal{O}_{X_s}$ -Modul $\mathcal{F}$ die Funktion

$$P_{\mathcal{F}}(n) = \sum_{i=0}^{\dim X_s} (-1)^i \dim_{\kappa(s)} H^i(X_s, \mathcal{F}(n))$$

mit

$$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_s}} (\mathcal{O}_{X_s}(1))^{\otimes n}$$

zu. Es ist $P_{\mathcal{F}}$ ein Polynom in der Variablen n mit rationalen Koeffizienten, genannt Hilbertpolynom von $\mathcal{F}$. Offenbar ist $P_{\mathcal{F}}(n)$ gerade die Euler-Poincaré-Charakteristik von $\mathcal{F}(n)$ auf X_s .

Für große n ist $P_{\mathcal{F}}(n) = \dim_{\mathfrak{x}(s)} H^0(X_s, \mathcal{F}(n))$, weil die höheren Kohomologiegruppen dann verschwinden.

Ist K ein Erweiterungskörper von $\mathfrak{x}(s)$, so haben wir auf

$X_K = X \times_S \operatorname{Spek} K = X_s \times_{\operatorname{Spek} \mathfrak{x}(s)} \operatorname{Spek} K$ die von $\mathcal{O}_X(1)$ induzierte sehr reiche Garbe $\mathcal{O}_{X_K}(1)$ und den kohärenten Modul

$\mathcal{F}_K = \mathcal{F} \otimes_{\mathfrak{x}(s)} K$. Zu diesem gehört die Funktion

$$P_{\mathcal{F}_K}(n) = \sum_{i=0}^{\dim X_K} (-1)^i \dim_K H^i(X_K, \mathcal{F}_K(n))$$

mit

$$\mathcal{F}_K(n) = \mathcal{F}_K \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} (\mathcal{O}_{X_K}(1)^{\otimes n}).$$

Da K flach ist über $\mathfrak{x}(s)$, gilt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathfrak{x}(s)} H^i(X_s, \mathcal{F}(n)) &= \dim_K (H^i(X_s, \mathcal{F}(n)) \otimes_{\mathfrak{x}(s)} K) \\ &= \dim_K H^i(X_K, \mathcal{F}_K(n)) \end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$P_{\mathcal{F}}(n) = P_{\mathcal{F}_K}(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit ist das Hilbertpolynom von $\mathcal{F}$ invariant gegenüber Grundkörpererweiterungen von $X_s \rightarrow \operatorname{Spek} \mathfrak{x}(s)$.

Ist $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul auf X , der flach ist über S , dann sind die Hilbertpolynome auf den Fasern X_s der dort induzierten $\mathcal{O}_{X_s}$ -Moduln $\mathcal{F}_s$ für Punkte s aus einer Zusammenhangskomponente

von S alle gleich, weil die Funktion, die jedem $s \in S$ die Euler-Poincaré-Charakteristik von $\mathcal{T}_s$ auf X_s zuordnet, lokal-konstant ist auf S (siehe EGA III (7.9.4)).

Wir kommen jetzt zum Hilbertschema. Dazu betrachten wir zunächst irgendein Schema X über einem beliebigen Schema S und bezeichnen mit $\text{Hilb}(X/S)$ die Menge der quasikohärenten $\mathcal{O}_X$ -Moduln, die Restklassenmoduln von $\mathcal{O}_X$ und flach über S sind. Nach einem Basiswechsel $S' \longrightarrow S$ ist die Menge $\text{Hilb}(X'/S')$ mit $X' = X \times_S S'$ definiert und man erhält einen kontravarianten Funktor $\text{Hilb}_{X/S}$ mit $\text{Hilb}_{X/S}(S') = \text{Hilb}(X'/S')$, $X' = X \times_S S'$ von der Kategorie der S -Schemata in die Kategorie der Mengen. Dieser Funktor ist aber im allgemeinen nicht repräsentierbar. Deshalb verlangt man, daß S noethersch und X projektiv ist über S , und beschränkt den Funktor $\text{Hilb}_{X/S}$ auf die Kategorie der lokal-noetherschen S -Schemata. Dann gibt es auf X einen invertierbaren $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{O}_X(1)$, der sehr reich ist bezüglich des Strukturmorphismus $X \longrightarrow S$. Ist $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul und bezeichnen X_s (bzw. $\mathcal{F}_s$) die Faser von X über s (bzw. die von $\mathcal{F}$ auf X_s induzierte Modulgarbe) für jedes $s \in S$, so ist für jeden Modul $\mathcal{F}_s$ das Hilbertpolynom definiert. Für jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}[n]$ sei $\text{Hilb}^P(X/S)$ die Teilmenge von $\text{Hilb}(X/S)$, die aus allen Restklassenmoduln von $\mathcal{O}_X$ (diese sind kohärent) besteht, die flach sind über S und deren Hilbertpolynom auf allen Fasern X_s gleich P ist. Man setzt

$$\text{Hilb}_{X/S}^P(S') = \text{Hilb}^P(X'/S')$$

und erhält so einen Unterfunktor von $\text{Hilb}_{X/S}$.

Mit diesen Bezeichnungen wird in [9]IV (Exp. 221), Th. 3.2 bewiesen:

(1.3) Satz: Der Funktor $\text{Hilb}_{X/S}^P$ ist repräsentierbar (d.h. es gibt ein lokal-noethersches S -Schema $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}^P$, so daß $\text{Hilb}_{X/S}^P$ und $\text{Hom}_S(\cdot, \underline{\text{Hilb}}_{X/S}^P)$ isomorphe Funktoren sind.) Es ist $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}^P$ ein projektives S -Schema.

Daraus folgt, daß auch $\text{Hilb}_{X/S}$ repräsentiert wird, und zwar durch das S -Schema

$$\underline{\text{Hilb}}_{X/S} = \coprod_{P \in \mathbb{Q}(n)} \underline{\text{Hilb}}_{X/S}^P .$$

$\underline{\text{Hilb}}_{X/S}$ ist lokal von endlichem Typ über S .

Die Repräsentierbarkeit von $\text{Hilb}_{X/S}$ ist äquivalent zur Existenz eines über $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}$ flachen Restklassenmoduls $\mathcal{M}$ von $\mathcal{O}_{X \times_S \underline{\text{Hilb}}_{X/S}}$, der im folgenden Sinn universell ist: Sei S' ein lokal-noethersches S -Schema, dann gibt es zu jedem Restklassenmodul $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{O}_{X \times_S S'}$, der flach über S' ist, genau einen S -Morphismus $g: S' \rightarrow \underline{\text{Hilb}}_{X/S}$, so daß $\mathcal{Q} = (\text{id}_X \times g)^*(\mathcal{M})$ gilt.

Es sei noch angemerkt, daß die über S' flachen Restklassenmodulgarben von $\mathcal{O}_{X \times_S S'}$ umkehrbar eindeutig den über S' flachen abgeschlossenen Unterschemata von $X \times_S S'$ entsprechen. Deshalb gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Hilbertschema und gewissen Divisoren auf X . Mit diesen werden wir uns jetzt beschäftigen.

Definition: Das Schema X sei von endlichem Typ und flach über dem lokal-noetherschen Schema S bezüglich $f: X \rightarrow S$. Ein effektiver (oder positiver) Divisor D auf X ist ein abgeschlossenes

Unterschema von X , das von einer Idealgarbe $\mathcal{J}$ beschrieben wird, die ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$ -Modul ist (d.h. lokal frei vom Rang 1 über $\mathcal{O}_X$ ist). Ein effektiver Divisor D auf X heißt relativer Divisor, wenn er über S flach ist.

Relative Divisoren lassen sich auch auf folgende Weise charakterisieren:

(1.4) Proposition: Seien S ein lokal-noethersches Schema, X flach und von endlichem Typ bezüglich $f: X \longrightarrow S$, $\mathcal{J}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$ -Idealgarbe auf X und D das von ihr definierte abgeschlossene Unterschema von X . Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:

- i) $\mathcal{J}$ ist invertierbar, und D ist flach über S .
- ii) D ist flach über S , und für jedes $s \in S$ ist das von D auf der Faser X_s induzierte Unterschema D_s ein effektiver Divisor auf X_s über $\text{Spek } \kappa(s)$.
- iii) In jedem Punkt $x \in X$ wird das Ideal $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ erzeugt von einem Element $g_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, das auf X_s einen Nicht-Nullteiler als Keim induziert ($s = f(x)$).

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii): Sei $s \in S$ und $x \in f^{-1}(s)$. Es ist $\mathcal{J}_x = g_x \mathcal{O}_{X,x}$ mit einem Nicht-Nullteiler $g_x \in \mathcal{O}_{X,x}$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{g_x} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} / g_x \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0$$

erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{K}(s) \xrightarrow{\bar{g}_x} \mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{K}(s) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{E}_x \mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{K}(s) \longrightarrow 0,$$

weil $\mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{E}_x \mathcal{O}_{X,x}$ flach über $\mathcal{O}_{S,s}$ ist.

Deshalb ist $\bar{g}_x \in \mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{S,s} \mathcal{K}(s)$ ein Nicht-Nullteiler, folglich induziert $\mathcal{V}$ auf X_s eine invertierbare Idealgarbe.

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $x \in X$ und $s = f(x)$. Nach Voraussetzung wird

$\mathcal{V}_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{K}(s)$ von einem Nicht-Nullteiler $\bar{g}_x \in \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{K}(s)$ erzeugt. Deshalb bildet $\bar{g}_x \in \mathcal{V}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{K}(x)$, $\bar{g}_x \neq 0$, eine Basis dieses Vektorraumes über $\mathcal{K}(x)$. Mit dem Lemma von Nakayama folgt, daß $\mathcal{V}_x$ von einem Repräsentanten $g_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ erzeugt wird.

iii) $\Rightarrow$ i): Sei $x \in X$ und $s = f(x)$. Es gibt eine offene affine Umgebung V von s , so daß $A := \Gamma(V, \mathcal{O}_S)$ noethersch ist und eine offene affine Umgebung U von x , $U \subset f^{-1}(V)$, so daß

$\Gamma(U, \mathcal{V}) = g \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ für ein $g \in B := \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Da $A \longrightarrow B$ flach ist, haben für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die zu $\mathfrak{p}B$ assoziierten Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ die Eigenschaft, daß die induzierten Primideale $\bar{\mathfrak{q}} \subset B / \mathfrak{p}B$ auf zu (0) assoziierte Primideale von $A/\mathfrak{p}$, also auf (0) herunterschneiden, denn $A/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{p}B$ ist wieder flach. Deshalb gilt $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_B(B/\mathfrak{p}B)$. Nun ist

$$\text{Ass}_B(B) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)} \text{Ass}_B(B/\mathfrak{p}B).$$

Angenommen, $g \in B$ ist ein Nullteiler, so ist $g \in \mathfrak{q}$ für ein

$\mathfrak{q} \in \text{Ass}_B(B)$, folglich liegt $\bar{g}$ in einem zu (0) assoziierten Primideal in $B \otimes (\text{Quotientenkörper}(A/\mathfrak{p}))$, induziert also einen Nullteiler auf der Faser über s' , wenn $\mathfrak{p}$ dem Punkt s' entspricht. Widerspruch!

Zum Beweis der Flachheit von D zeigt man, daß $\text{Tor}_1^A(B/gB, A/\mathfrak{p}) = 0$ ist für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$, also B/gB flach ist über A . Für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ ist die Homothetie $\bar{g}$ nach Voraussetzung injektiv und es gilt $\text{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{p}) = 0$, also folgt mit der exakten Sequenz

$$\text{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{p}) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(B/gB, A/\mathfrak{p}) \longrightarrow B/\mathfrak{p}B \xrightarrow{\bar{g}} B/\mathfrak{p}B$$

die Behauptung aus $\text{Tor}_1^A(B/gB, A/\mathfrak{p}) = 0$. —

Die Bedeutung relativer Divisoren beruht auf ihrer Verträglichkeit mit beliebigen Basiswechseln. Ist nämlich $S' \xrightarrow{f} S$ ein lokal-noethersches S -Schema, so betrachten wir das kommutative Diagramm (die Bezeichnungen sind dieselben wie in (1.4)):

$$\begin{array}{ccc} X' := S' \times_S X & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

(1.5): Ist D ein relativer Divisor auf X über S , so ist $D' := S' \times_S D$ ein relativer Divisor auf X' über S' .

Offenbar ist D' wieder flach über S' . Wegen Satz (1.4) ii) müssen wir noch zeigen, daß für jedes $s' \in S'$ das abgeschlossene Unterschema $D_{s'}'$ von $X_{s'}'$ ein effektiver Divisor ist. Nun gilt mit $s = g(s')$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X'_S = X_S \times_{\mathfrak{A}(S)} \operatorname{Spek} \mathfrak{A}(S') & \longrightarrow & X_S \\
 \downarrow & & \downarrow f_S \\
 \operatorname{Spek} \mathfrak{A}(S') & \longrightarrow & \operatorname{Spek} \mathfrak{A}(S)
 \end{array}$$

ist kommutativ und $D'_S = D_S \times_{\operatorname{Spek} \mathfrak{A}(S)} \operatorname{Spek} \mathfrak{A}(S')$. Folglich ist D'_S flach über D_S und die Bilder der lokalen Erzeugenden der Idealgarbe $\mathcal{V}_S$ auf X_S sind Nicht-Nullteiler in $\mathcal{O}_{X'_S}$.

Wegen (1.5) kann man einen kontravarianten Funktor $\operatorname{Div}_{X/S}$ definieren von der Kategorie der lokal-noetherschen S -Schemata in die Kategorie der Mengen mit

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Div}_{X/S}(S') &= \operatorname{Div}(X \times_S S' / S') = \\
 &= \{\text{Menge der relativen Divisoren auf } X \times_S S' \text{ über } S'\}
 \end{aligned}$$

für jedes lokal-noethersche S -Schema S' .

Unmittelbar aus den Definitionen folgt, daß $\operatorname{Div}_{X/S}$ ein Unterfunktork von $\operatorname{Hilb}_{X/S}$ ist: Es gibt einen natürlichen Morphismus von Funktoren

$$\operatorname{Div}_{X/S} \longrightarrow \operatorname{Hilb}_{X/S}.$$

Deshalb folgt mit Hilfe allgemeiner Aussagen über die Repräsentierbarkeit von Unterfunktoren (vgl. [10] IV 3.13 und [9] V, Prop. 4.1):

(1.6) Satz: Sei X projektiv und flach über dem noetherschen Schema S . Dann ist der Funktor $\text{Div}_{X/S}$ repräsentierbar durch ein offenes Unterschema

$$\underline{\text{Div}}_{X/S} \quad \text{von} \quad \underline{\text{Hilb}}_{X/S} \quad .$$

Für eine sehr reiche Garbe $\mathcal{O}_X(1)$ auf X über S erhält man so wie beim Hilbertschema $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}$ das Schema

$$\underline{\text{Div}}_{X/S} = \bigsqcup_{P \in \mathbb{Q} \setminus \{n\}} \underline{\text{Div}}_{X/S}^P$$

als disjunkte Vereinigung über S quasi-projektiver offener Unterschemata von $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}^P$.

Nach den Divisoren sollen auch die Divisorenklassen durch einen Funktor beschrieben werden. Jedem Schema X kann man $\text{Pic}(X)$, die Gruppe der Isomorphieklassen von invertierbaren $\mathcal{O}_X$ -Moduln, zuordnen. Es gibt einen kanonischen Gruppenisomorphismus

$$\text{Pic}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) ,$$

($\mathcal{O}_X^*$ ist dabei die Garbe der Einheiten von $\mathcal{O}_X$). Die Zuordnung $X \rightsquigarrow \text{Pic}(X)$ ergibt einen kontravarianten Funktor. Der obige Gruppenisomorphismus ist funktoriell bezüglich X .

Ist X ein S -Schema, so erhält man entsprechend durch $S' \rightsquigarrow \text{Pic}(X \times_S S')$ (für S -Schemata S') einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der S -Schemata in die der abelschen Gruppen, der aber im allgemeinen nicht repräsentierbar ist, weil die zu klassifizierenden invertierbaren Moduln nicht-triviale Automorphismen besitzen.

Deshalb betrachten wir für ein S -Schema $X \xrightarrow{f} S$ die Gruppe

$$\text{Pic}'(X/S) = \Gamma(S, R^1(f_*(\mathcal{O}_X^*))) ,$$

wobei $R^1(f_*(\mathcal{O}_X^*))$ die assoziierte Garbe von Gruppen zu der Prägarbe ist, die man erhält, wenn man jeder offenen nicht-leeren Teilmenge $U \subset S$ die Gruppe $H^1(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X^*)$ zuordnet. Man nennt $R^1(f_*(\mathcal{O}_X^*))$ auch die 1. Bildgarbe von $\mathcal{O}_X^*$.

Ein Element $\mathfrak{f} \in \Gamma(S, R^1(f_*(\mathcal{O}_X^*)))$ ist definiert durch invertierbare $\mathcal{O}_X/f^{-1}(U_i)$ -Moduln $\mathcal{L}_i$ auf $f^{-1}(U_i)$ für eine offene Überdeckung $\{U_i | i \in I\}$ von S , deren Beschränkungen auf die Urbilder paarweiser Durchschnitte $U_i \cap U_j$ lokal isomorph sind über $U_i \cap U_j$, d.h. ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so gibt es zu jedem Punkt $x \in U_i \cap U_j$ eine offene Umgebung $U \subset U_i \cap U_j$ mit der Eigenschaft: Die Beschränkungen von $\mathcal{L}_i|f^{-1}(U_i \cap U_j)$ und $\mathcal{L}_j|f^{-1}(U_i \cap U_j)$ auf $f^{-1}(U)$ sind isomorphe $\mathcal{O}_X/f^{-1}(U)$ -Moduln. Dabei sind die $\mathcal{L}_i$ Repräsentanten der Klassen $\mathfrak{f}|U_i \in H^1(f^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X^*)$. Wird $\mathfrak{f}$ auch definiert durch eine Überdeckung $\{U'_i | i \in I'\}$ von S mit invertierbaren Moduln $\mathcal{L}'_i$, so liefern die Beschränkungen der $\mathcal{L}_i$ bzw. $\mathcal{L}'_i$ auf einer gemeinsamen Verfeinerung der Überdeckungen $\{U_i\}$ und $\{U'_i\}$ über S lokal isomorphe Moduln. Insbesondere definieren die invertierbaren $\mathcal{O}_X$ -Moduln Elemente aus $\Gamma(S, R^1(f_*(\mathcal{O}_X^*)))$.

Durch

$$S' \rightsquigarrow \text{Pic}'_{X/S}(S') = \text{Pic}'(X \times_S S' / S')$$

für jedes S -Schema S' wird ein kontravarianter Funktor $\text{Pic}'_{X/S}$ von der Kategorie der S -Schemata in die Kategorie der abelschen Gruppen definiert.

Unter gewissen Voraussetzungen ist der Funktor $\text{Pic}'_{X/S}$ repräsentierbar (siehe [9] V, Th. 3.1).

(1.7) Satz: Sei $f: X \longrightarrow S$ ein Morphismus lokal-noetherscher Schemata. Ist f flach und projektiv und sind die geometrischen Fasern von f integrale Schemata, dann wird der Funktor $\text{Pic}'_{X/S}$ von der Kategorie der lokal-noetherschen S -Schemata in die Kategorie der abelschen Gruppen repräsentiert durch ein lokal-noethersches, separiertes S -Schema $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$.

Das S -Schema $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ heißt Picard-Schema von X über S .

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen des Satzes über $f: X \longrightarrow S$ gilt stets, daß der kanonische Homomorphismus $\mathcal{O}_S \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ ein Isomorphismus ist, und diese Eigenschaft ist invariant unter beliebigen Basiserweiterungen (EGA III, (7.8.6)).

Genau wie die S -Schemata $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}$ und $\underline{\text{Div}}_{X/S}$ läßt sich auch $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ gemäß den Hilbertpolynomen $P \in \mathbb{Q}[n]$ zerlegen, nachdem man eine sehr reiche Garbe $\mathcal{O}_X(1)$ auf X über S ausgezeichnet hat. Ein Element aus $\Gamma(S, R^1 f_*(\mathcal{O}_X^*))$ definiert insbesondere auf jeder Faser X_s von $X \longrightarrow S$ eine Isomorphieklasse invertierbarer $\mathcal{O}_{X_s}$ -Moduln, und dieser Klasse ist ein Hilbertpolynom zugeordnet. Über allen Punkten s einer Zusammenhangskomponente von S wird dasselbe Hilbertpolynom induziert. Die Zuordnung ist verträglich mit Basiswechsel. Deshalb gibt es zu geeignetem $P \in \mathbb{Q}[n]$ ein offenes Unterschema $\underline{\text{Pic}}^P_{X/S}$ von $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$, das solche globalen Schnitte der 1. Bildgarbe repräsentiert, die auf allen Fasern

das Hilbertpolynom P induzieren, und es gilt

$$\underline{\text{Pic}}_{X/S} = \coprod_{P \in \mathbb{Q}[n]} \underline{\text{Pic}}_{X/S}^P.$$

Da $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^P$ im allgemeinen nicht von endlichem Typ über S ist, erhalten wir nur unter zusätzlichen Voraussetzungen eine zu (1.3) analoge Aussage (vgl. [9] VI, cor. 4.2):

(1.8) Satz: Sei $f: X \longrightarrow S$ ein glatter, projektiver Morphismus mit zusammenhängenden geometrischen Fasern. Dann sind die Schemata $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^P$, $P \in \mathbb{Q}[n]$ projektiv über S .

Zuletzt weisen wir noch auf einen natürlichen Morphismus der Funktoren $\text{Div}_{X/S}$ und $\text{Pic}'_{X/S}$ hin. Sei zunächst X ein beliebiges S -Schema mit dem Strukturmorphismus $f: X \longrightarrow S$. Da zwei invertierbare $\mathcal{O}_X$ -Moduln genau dann denselben Schnitt in $\Gamma(S, R^1(f_*(\mathcal{O}_X^*))$ definieren, wenn sie über S lokalisomorph sind, definieren sie erst recht denselben Schnitt, wenn sie als $\mathcal{O}_X$ -Moduln isomorph sind. Also erhält man für jedes S -Schema S' eine kanonische Abbildung

$$\text{Pic}(X \times_S S') \longrightarrow \text{Pic}'_{X/S}(S').$$

Weitere Einzelheiten über diese Abbildung findet man in ([9] V, 2).

Sei nun X von endlichem Typ und flach über dem lokal-noetherschen Schema S bezüglich $f: X \longrightarrow S$. Da man jedem Divisor D eine invertierbare Garbe von Moduln $\mathcal{L}(D)$ zuordnen kann, erhält man für jedes lokal-noethersche S -Schema S' eine Abbildung

$$\text{Div}_{X/S}(S') \longrightarrow \text{Pic}(X \times_S S') ,$$

deren Komposition mit der natürlichen Abbildung
 $\text{Pic}(X \times_S S') \longrightarrow \text{Pic}'_{X/S}(S')$ eine kanonische Abbildung

$$\text{Div}_{X/S}(S') \longrightarrow \text{Pic}'_{X/S}(S')$$

ergibt, die funktoriell ist in S' und deshalb einen natürlichen
 Morphismus von Funktoren

$$\phi: \text{Div}_{X/S} \longrightarrow \text{Pic}'_{X/S}$$

definiert. Dieser wird induziert, falls $f: X \longrightarrow S$ so gewählt
 ist, daß beide Funktoren repräsentierbar sind, von einem S -Morphis-
 mus von Schemata

$$\varphi: \underline{\text{Div}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S} ,$$

den wir im nächsten Paragraphen weiter untersuchen werden.

§ 2 Eigenschaften des Hilbert- und des Picardschemas

Aus den Existenzsätzen im § 1 folgt, daß für eine Kurve $\pi: X \longrightarrow S$, wobei S ein lokal-noethersches (bzw. noethersches) Schema ist, die S -Schemata $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ bzw. $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}$ und $\underline{\text{Div}}_{X/S}$ existieren. Gegenstand dieses Paragraphen ist die S -Schema-Struktur der offenen und abgeschlossenen Unterschemata $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}^n$, $\underline{\text{Div}}_{X/S}^n$ und $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^n$ zu dem konstanten Hilbertpolynom n , $n \in \mathbb{N}$.

Zunächst wenden wir uns symmetrischen Produkten zu.

Sei S ein lokal-noethersches Schema und X ein S -Schema von endlichem Typ über S bezüglich $f: X \longrightarrow S$. Dann operiert auf dem n -fachen Produkt $(X/S)^n := X \times_S \dots \times_S X$ die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ vom Grad n in natürlicher Weise. Das n -fache symmetrische Produkt von X über S ist das Quotientenschema von $(X/S)^n$ nach $\mathfrak{S}_n$, falls es existiert. Es wird mit $(X/S)^{(n)}$ bezeichnet. Der Quotient $(X/S)^n / \mathfrak{S}_n$ existiert z.B. immer dann, wenn jede Bahn von $\mathfrak{S}_n$ in einer offenen affinen Teilmenge von $(X/S)^n$ enthalten ist. Das folgende Lemma erweist sich als nützlich für Existenzbeweise symmetrischer Produkte.

(2.1) Lemma: Sei $f: X \longrightarrow S$ zusätzlich als quasi-projektiv vorausgesetzt. Dann gibt es zu endlich vielen Punkten $x_1, \dots, x_n$ aus X , deren Bilder $f(x_i)$ alle in einer offenen affinen Teilmenge von S liegen, eine offene affine Teilmenge $U \subset X$ mit $x_i \in U$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis: Man kann sich darauf beschränken, daß $S = \text{Spek } A$ ein affines Schema ist. Es gibt einen endlichen A -Modul M und eine lokal-abgeschlossene Einbettung ι

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & P(M) = \text{Proj}(S(M)) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S & \end{array}$$

wobei $S(M)$ die symmetrische Algebra von M ist über A . In $P(M)$ existiert aber offenbar eine offene affine (deshalb quasi-kompakte) Teilmenge U' , die alle Punkte $\iota(x_i)$ enthält. Dann ist $U = U' \cap \iota(X)$ eine offene affine Teilmenge von $\iota(X)$ mit der gewünschten Eigenschaft. —

(2.2) Proposition: Sei $f: X \longrightarrow S$ zusätzlich quasi-projektiv. Dann existiert das symmetrische Produkt $(X/S)^{(n)}$.

Beweis: Es ist $(X/S)^n$ wieder quasi-projektiv, und die Bahnen der Gruppe $\mathcal{O}_n$ liegen als endliche Mengen von Punkten, die alle denselben Bildpunkt in S haben, in offenen affinen Teilmengen von $(X/S)^n$ nach Lemma (2.1). —

Man erhält noch folgende Dimensionsaussage.

(2.3) Proposition: Existiert $(X/S)^{(n)}$, so gilt $\dim(X/S)^n = \dim(X/S)^{(n)}$. Ist $X \longrightarrow S$ zusätzlich als flach mit $\dim X_s = m$ für jedes $s \in S$ vorausgesetzt, so ist

$$\dim(X/S)^{(n)} = \dim(X/S)^n = \dim S + n \cdot m.$$

Beweis: Sei $\pi : (X/S)^n \longrightarrow (X/S)^{(n)}$ die kanonische Projektion. Ist $U' \subset (X/S)^{(n)}$ offen, affin und nicht-leer, so gilt das auch für $U = \pi^{-1}(U')$. Nun ist $\Gamma(U, \mathcal{O}_{(X/S)^n})$ ganz, sogar endlich über $\Gamma(U', \mathcal{O}_{(X/S)^{(n)})} = \Gamma(U, \mathcal{O}_{(X/S)^n})^{\pi^*}$, der Invariantenalgebra. Dabei ist U' so gewählt, daß $U = V \times_V \dots \times_V V$, V gilt für offene affine Mengen $V \subset X$ und $V' \subset S$ mit $f(V) \subset V'$. Also ist π ein endlicher S -Morphismus. Daraus folgt die Gleichheit der Dimensionen.

Für $s \in S$ ist

$$\begin{aligned} \dim((X/S)^n \times_S \operatorname{Spek} \kappa(s)) &= \dim(X \times_S \operatorname{Spek} \kappa(s) / \operatorname{Spek} \kappa(s))^n \\ &= n \cdot \dim(X \times_S \operatorname{Spek} \kappa(s)) \\ &= n \cdot m, \end{aligned}$$

denn $X \times_S \operatorname{Spek} \kappa(s)$ ist ein algebraisches $\kappa(s)$ -Schema. Es folgt

$$\dim(X/S)^n \leq \dim S + n \cdot m.$$

Da $f \circ p : (X/S)^n \longrightarrow S$ flach ist (p ist eine der Projektionen $(X/S)^n \longrightarrow X$), gilt für jedes $x \in (f \circ p)^{-1}(s)$:

$$\dim \mathcal{O}_{(X/S)^n, x} = \dim \mathcal{O}_{S, s} + \dim(\mathcal{O}_{(X/S)^n, x} \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \kappa(s)),$$

insbesondere gilt diese Gleichung, wenn x und s geeignet gewählte abgeschlossene Punkte in irreduziblen Komponenten von $(f \circ p)^{-1}(s)$ bzw. von S mit Halmen maximaler Dimension sind. Daraus folgt:

$$\dim(X/S)^n \geq \dim S + n \cdot m,$$

also insgesamt

$$\dim(X/S)^n = \dim S + n \cdot m. \text{ —}$$

Die folgende Aussage ist im allgemeinen nur für Kurven richtig:

(2.4) Proposition: Sei $f: X \longrightarrow S$ eine Kurve über S . Dann ist der induzierte S -Morphismus $(X/S)^{(n)} \longrightarrow S$ glatt.

Beweis: Es ist $(X/S)^{(n)}$ und dann auch $(X/S)^{(n)}$ wieder flach über S ([12] I. 1.). Die Fasern von $(X/S)^{(n)}$ über geometrischen Punkten von S sind alle glatt von der Dimension n , weil sie kanonisch isomorph zu n -fachen symmetrischen Produkten glatter Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind.—

Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Hilbertschema und dem symmetrischen Produkt (vgl. [9] IV, 6.). Zunächst zeigen wir:

(2.5) Proposition: Sei S ein noethersches Schema und X projektiv über S bezüglich $f: X \longrightarrow S$ (d.h. $\text{Hilb}_{X/S}$ und $(X/S)^{(n)}$ existieren). Dann gibt es einen natürlichen S -Morphismus

$$\mathcal{N}_{X/S} : \text{Hilb}_{X/S}^n \longrightarrow (X/S)^{(n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\text{Hilb}_{X/S}^n$ das Hilbertschema von X über S zu dem konstanten Hilbertpolynom n .

Beweis: Es wird gezeigt, daß es einen Morphismus von Funktoren der Kategorie der lokal-noetherschen S -Schemata in die der Mengen gibt:

$$\mathcal{V}: \text{Hilb}_{X/S}^n \longrightarrow h_{(X/S)^{(n)}} = \text{Hom}_S(\cdot, (X/S)^{(n)}) .$$

Daraus folgt die Existenz von $\mathcal{N}_{X/S}$. Den Morphismus $\mathcal{V}$ erhält man auf folgende Weise:

(2.5.1) Sei M ein Modul über einem Ring A . Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ operiert auf dem n -fachen Tensorprodukt $\otimes_A^n M$ durch $\sigma(\otimes_{i=1}^n m_i) = \otimes_{i=1}^n m_{\sigma^{-1}(i)}$. Der A -Modul der invarianten Tensoren wird mit $M_A^{(n)}$ bezeichnet. Für ein $v \in \otimes_A^n M$ bedeutet $\square v$ die Summe der Elemente der Bahn von v bezüglich $\mathfrak{S}_n$. Sei $M_{n,\mathbb{Z}}^{(n)}$ der Ring der $n \times n$ -Matrizen über $\mathbb{Z}$. Dann ist $M_{n,\mathbb{Z}}^{(n)}$ der A -Modul der unter $\mathfrak{S}_n$ invarianten Tensoren und es gibt einen Ringhomomorphismus

$$\text{ld} : M_{n,\mathbb{Z}}^{(n)} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mit $\text{ld}(a \otimes \dots \otimes a) = \det a$ für $a \in M_{n,\mathbb{Z}}$ und $a \otimes \dots \otimes a \in M_{n,\mathbb{Z}}^{(n)}$.

Man kann die "lineare Determinante" ld wie in [12], I.2. konstruieren. Sei $(e_{r,s})$ ($1 \leq r,s \leq n$ fest gewählt) die $n \times n$ -Matrix mit

$$(e_{r,s})_{i,j} = \delta_{ri} \cdot \delta_{sj} \quad (\text{Kronecker Symbol}),$$

$1 \leq i,j \leq n$. Sei T_n die Menge aller Abbildungen von $\{1,2,\dots,n\}$ in sich. Für $(f,g) \in T_n^2$ setzt man

$$E_{f,g} = \bigotimes_{i=1}^n (e_{f(i),g(i)}) .$$

Die Menge $\{E_{f,g} \mid (f,g) \in T_n^2\}$ bildet eine $\mathbb{Z}$ -Basis von $\bigotimes_{\mathbb{Z}}^n M_{n,\mathbb{Z}}$. Die $\square E_{f,g}$ sind eine Basis von $M_{n,\mathbb{Z}}^{(n)}$, wenn (f,g) die Repräsentanten von $T_n^2 / \mathfrak{S}_n$ durchläuft, wobei $\mathfrak{S}_n$ auf T_n^2 durch $\sigma(f,g) = (f \circ \sigma^{-1}, g \circ \sigma^{-1})$ operiert. Dann definiert man als ld die $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung $M_{n,\mathbb{Z}}^{(n)} \longrightarrow \mathbb{Z}$, die durch

$$\text{ld}(\square E_{f,g}) = \varepsilon_f \cdot \varepsilon_g$$

gegeben ist. Dabei gilt für $h \in T_n$:

$$\varepsilon_h = \begin{cases} 0 & \text{für } h \notin \mathcal{T}_n \\ \text{sign}(h) & \text{für } h \in \mathcal{T}_n \end{cases}.$$

Wegen $\text{ld}(\square E_{f,g} \cdot \square E_{h,k}) = \text{ld}(\square E_{f,g}) \cdot \text{ld}(\square E_{h,k})$ ist ld sogar ein Ringhomomorphismus, der die Bedingung aus (2.5.1) erfüllt (Beweis a.a.O.).

Bezeichnet $M_{n,A}$ den Ring der $n \times n$ -Matrizen über dem Ring A , so induziert der kanonische Isomorphismus $M_{n,\mathbb{Z}}^{(n)} \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow M_{n,A}^{(n)}$ den Ringhomomorphismus

$$\text{ld} : M_{n,A}^{(n)} \longrightarrow A$$

mit $\text{ld}(a \otimes \dots \otimes a) = \det a$ für $a \in M_{n,A}$.

(2.5.2) Ist M ein freier Modul vom Rang n über A , so kann man nach Wahl einer A -Basis von M den Ring $\text{End}_A(M)$ identifizieren mit $M_{n,A}$, und man erhält den Ringhomomorphismus

$$\text{ld} : (\text{End}_A(M))_A^{(n)} \longrightarrow A,$$

der offenbar unabhängig von der ausgezeichneten Basis ist. Im Fall einer freien A -Algebra B vom Rang n komponiert man den von

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow \text{End}_A(B) \\ b &\longrightarrow T_b \quad (\text{Homothetie von } b) \end{aligned}$$

induzierten Ringhomomorphismus

$$B_A^{(n)} \longrightarrow (\text{End}_A(B))_A^{(n)}$$

mit

$$\text{ld} : (\text{End}_A(B))_A^{(n)} \longrightarrow A$$

und erhält den A -Algebra-Homomorphismus

$$\theta_{B/A} : B_A^{(n)} \longrightarrow A .$$

(2.5.3) Sei $g: Z \longrightarrow T$ ein endlicher, flacher Morphismus von Schemata, so daß $g_*(\mathcal{O}_Z)$ lokal-frei vom Rang n ist über $\mathcal{O}_T$. Mittels einer geeigneten offenen affinen Überdeckung von T kann man einen T -Morphismus analog zu (2.5.2)

$$\theta_{Z/T} : T \longrightarrow (Z/T)^{(n)}$$

konstruieren.

(2.5.4) Ist T ein lokal-noethersches S -Schema, so müssen wir zur Konstruktion von $\mathcal{V}$ jedem Objekt von $\text{Hilb}_{X/S}^n(T)$ einen S -Morphismus $T \longrightarrow (X/S)^{(n)}$ zuordnen. Sei $Z \in \text{Hilb}_{X/S}^n(T)$, d.h. Z ist ein abgeschlossenes Unterschema von $X \times_S T$, das flach und eigentlich ist über T mit 0-dimensionalen Fasern (Grad des Hilbertpolynoms ist 0. vgl. EGA IV 5.3), also ist f quasi-endlich und wegen "eigentlich" somit endlich. Folglich ist $(f_T)_*(\mathcal{O}_Z)$ lokal-freier $\mathcal{O}_T$ -Modul vom Rang n , da für jedes $t \in T$ für die Beschränkung $\mathcal{O}_{Z_t}$ gilt: $\dim_{\kappa(t)} \Gamma(Z_t, \mathcal{O}_{Z_t}) = n$. Mit (2.5.3) erhält man den T -Morphismus

$$\theta_{Z/T} : T \longrightarrow (Z/T)^{(n)} .$$

Von $Z \hookrightarrow X \times_S T \xrightarrow{P_1} X$ wird

$$(Z/T)^{(n)} \longrightarrow (X/S)^{(n)}$$

induziert. Die Komposition dieser Morphismen (über S)

$$T \xrightarrow{\theta_{Z/T}} (Z/T)^{(n)} \longrightarrow (X/S)^{(n)}$$

wird Z als sein Bild $\varphi(T)(Z)$ in $\text{Hom}_S(T, (X/S)^{(n)})$ zugeordnet. Offenbar ist φ dann funktoriell, also ein Morphismus der Funktoren $\text{Hilb}_{X/S}^n$ und $\text{Hom}_S(\cdot, (X/S)^{(n)})$.

Ist Z_0 das universelle, d.h. zu $\text{id}_{\text{Hilb}_{X/S}^n}$ gehörende Objekt aus $\text{Hilb}_{X/S}^n(\text{Hilb}_{X/S}^n)$, so ist

$$\mathcal{N}_{X/S} := \varphi(\text{Hilb}_{X/S}^n)(Z_0) \in \text{Hom}_S(\text{Hilb}_{X/S}^n, (X/S)^{(n)}) \text{ .—}$$

Bemerkung: Offenbar kann man den Morphismus

$\varphi: \text{Hilb}_{X/S}^n \longrightarrow \text{Hom}_S(\cdot, (X/S)^{(n)})$ auch ohne die Repräsentierbarkeit von $\text{Hilb}_{X/S}^n$ sichernde Voraussetzungen konstruieren. Dazu braucht f nur ein flacher Morphismus beliebiger Schemata zu sein, so daß $(X/S)^{(n)}$ existiert.

(2.6) Proposition: Sei S ein noethersches Schema und $\pi: X \longrightarrow S$ eine Kurve über S . Dann ist

$$\mathcal{N}_{X/S}: \text{Hilb}_{X/S}^n \longrightarrow (X/S)^{(n)}$$

ein S -Isomorphismus.

Zum Beweis siehe [12] II Theorem 3.4. Prop. 4.1.

Dort wird gezeigt, daß für eine Kurve $\pi: X \longrightarrow S$ bezüglich des "Additions-Morphismus"

$$\alpha(n-1,1) : (X/S)^{(n-1)} \times_S X \longrightarrow (X/S)^{(n)}$$

das abgeschlossene Unterschema

$$(X/S)^{(n-1)} \times_S X \xrightarrow{(\alpha(n-1,1), p_2)} (X/S)^{(n)} \times_S X$$

aus $\text{Hilb}_{X/S}^n((X/S)^{(n)})$ ist. Man kann nun einen Morphismus

$$\psi : \text{Hom}_S(\cdot, (X/S)^{(n)}) \longrightarrow \text{Hilb}_{X/S}^n$$

definieren, indem man für ein lokal-noethersches S -Schema T einem Morphismus $g : T \longrightarrow (X/S)^{(n)}$ das "pull-back" von $(\alpha(n-1,1), p_2)$ bezüglich g zuordnet:

$$\begin{array}{ccc} Z := T \times_{(X/S)^{(n)}} (X/S)^{(n-1)} \times_S X & \longrightarrow & (X/S)^{(n-1)} \times_S X \\ \downarrow & & \downarrow (\alpha(n-1,1), p_2) \\ T \times_S X = T \times_{(X/S)^{(n)}} (X/S)^{(n)} \times_S X & \longrightarrow & (X/S)^{(n)} \times_S X \\ \downarrow & & \downarrow q_1 \\ T & \xrightarrow{\quad g \quad} & (X/S)^{(n)} \end{array}$$

Es ist $Z \hookrightarrow T \times_S X$ aus $\text{Hilb}_{X/S}^n(T)$. Da φ und ψ zueinander invers sind (a.a.O. Th. 3.4), folgt die Isomorphie der Funktoren und damit die Isomorphie der sie repräsentierenden Schemata.—

Aus den Propositionen (2.4), (2.5) und (2.6) ergibt sich unmittelbar

(2.7) Proposition: Sei $\pi : X \longrightarrow S$ eine Kurve über dem noetherschen Schema S . Dann ist $\text{Hilb}_{X/S}^n$, $n \in \mathbb{N}$, glatt mit n -dimensionalen Fasern.

Bemerkung: Unter bestimmten Voraussetzungen ist auch für ein S -Schema X der relativen Dimension > 1 das Hilbertschema glatt über S (vgl. [9] IV Korollar 5.4).

(2.8) Proposition: Sei $\pi: X \longrightarrow S$ eine Kurve vom Geschlecht g . Dann sind für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Funktoren $\text{Div}_{X/S}^d$ und $\text{Hilb}_{X/S}^d$ kanonisch isomorph.

Beweis: Nach den Definitionen ist $\text{Div}_{X/S}^d$ ein Unterfunctor von $\text{Hilb}_{X/S}^d$ für jedes $d \in \mathbb{N}$. Sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es einen natürlichen Morphismus von Funktoren

$$h_d: \text{Div}_{X/S}^d \longrightarrow \text{Hilb}_{X/S}^d,$$

so daß für jedes lokal-noethersche S -Schema S' die Abbildung

$$h_d(S'): \text{Div}_{X/S}^d(S') \longrightarrow \text{Hilb}_{X/S}^d(S')$$

injektiv ist. Es muß noch die Surjektivität von $h_d(S')$ gezeigt werden. Dazu genügt es, den Fall $S' = S$ zu betrachten. Sei also $\mathcal{O}_X/\mathcal{J} \in \text{Hilb}_{X/S}^d(S)$, und D das von der Idealgarbe $\mathcal{J}$ beschriebene abgeschlossene, über S flache Unterschema von X . Der induzierte Restklassenmodul $\mathcal{O}_{X_s}/\mathcal{J}_s$ und das zugehörige abgeschlossene Unterschema D_s von X_s besitzen für jedes $s \in S$ das Hilbertpolynom d . Da X_s eine projektive Kurve über $\kappa(s)$ ist, sind die Dimension des Trägers von $\mathcal{O}_{X_s}/\mathcal{J}_s$ und der Grad des Hilbertpolynoms von $\mathcal{O}_{X_s}/\mathcal{J}_s$ gleich (EGAIV, 5.3), d.h. $D_s \subset X_s$ ist ein nulldimensionales abgeschlossenes Unterschema von X_s , also ein effektiver Divisor auf X_s . Es folgt mit Satz (1.4) ii), daß $D \in \text{Div}_{X/S}^d(S)$ ist. —

Bemerkung: Der Inklusionsmorphismus $h: \text{Div}_{X/S} \longrightarrow \text{Hilb}_{X/S}$ liefert auch für Kurven $X \longrightarrow S$ keine Isomorphie der Funktoren, da $\mathcal{O}_X \in \text{Hilb}_{X/S}(S)$ ist, aber $X \notin \text{Div}_{X/S}(S)$ gilt.

(2.9) Korollar: Der Funktor $\text{Div}_{X/S}^d$ wird durch das S -Schema $\text{Hilb}_{X/S}^d$ repräsentiert.

(2.10) Korollar: Ist D der zu $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \in \text{Hilb}_{X/S}^d(S')$ gehörende relative Divisor in $X' = X \times_S S'$, so induziert D auf jeder Faser von $X' \longrightarrow S'$ einen positiven Divisor vom Grad d .

Beweis: Es genügt, den Fall $S' = S$ zu betrachten. Für $s \in S$ ist das Hilbertpolynom auf der Faser $X_s = X \times_S \text{Spek } \kappa(s)$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_s(n) &= \dim_{\kappa(s)} H^0(X_s, (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_s(n)) \\ &= d, \end{aligned}$$

wobei $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_s = \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_S} \kappa(s)$ die auf X_s induzierte Modulgarbe ist, denn es gilt $H^1(X_s, (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_s(n)) = (0)$ für alle n . Daraus folgt für den auf X_s von D induzierten positiven Divisor D_s :

$$\text{grad } D_s = \dim_{\kappa(s)} \Gamma(X_s, (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_s) = d.$$

Daraus folgt wegen der Invarianz des Grades eines Divisors bei Erweiterung des Grundkörpers:

(2.11) Korollar: Ist D der zu $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \in \text{Hilb}_{X/S}^d(S')$ gehörende relative Divisor in $X = X \times_S S'$, so ist für jeden K -wertigen (oder K -rationalen) Punkt $\text{Spek } K \longrightarrow S'$ (K ist ein Körper) das inverse

Bild D_K von D in $X'_K = X' \times_S K$, $\text{Spek } K$ ein positiver Divisor vom Grad d .

Ähnlich wie für das Hilbertschema gilt für das Picardschema

(2.12) Proposition: Sei $\pi : X \longrightarrow S$ eine Kurve über S vom Geschlecht g . Dann ist $\text{Pic}_{X/S}^d$ glatt über S von der relativen Dimension g für alle $d \in \mathbb{N}$.

Beweis: Aus [9] VI Prop. 2.10. (ii) folgt, daß $\text{Pic}_{X/S} \longrightarrow S$ glatt ist. Dann ist die Beschränkung auf die offene Teilmenge $\text{Pic}_{X/S}^d$ wieder glatt und mit dem klassischen Ergebnis, daß das Picardschema der Divisoren vom Grad d einer Kurve vom Geschlecht g über einem algebraisch-abgeschlossenen Körper gerade g -dimensional ist, folgt die Aussage über die relative Dimension von $\text{Pic}_{X/S}^d$ über S .—

Die folgenden Untersuchungen lassen sich leichter darstellen, wenn man den Begriff der Faser eines Morphismus von Funktoren benutzt.

Sei C irgendeine Kategorie und F, G zwei kontravariante Funktoren von C in die Kategorie der Mengen. Ist $\phi : F \longrightarrow G$ ein Morphismus der Funktoren F und G , S ein Objekt von C und $\alpha \in G(S)$, so definiert man die Faser von ϕ über α als den kontravarianten Funktor

$$\phi^\alpha : C/S \rightsquigarrow (\text{Mengen})$$

von der Kategorie C über S in die Kategorie der Mengen mit

$$\phi^\alpha(T \xrightarrow{f} S) = \{ \beta \in F(T) \mid \phi(T)(\beta) = G(f)(\alpha) \text{ in } G(T) \}$$

für jedes Objekt $T \xrightarrow{f} S$ aus C/S und

$$\phi^\alpha(g) = F(g) | \phi^\alpha(T_2 \xrightarrow{f_2} S) : \phi^\alpha(T_2 \xrightarrow{f_2} S) \longrightarrow \phi^\alpha(T_1 \xrightarrow{f_1} S)$$

für jeden Morphismus

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{g} & T_2 \\ f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\ & S & \end{array}$$

aus C/S .

Seien nun C/S die Kategorie der lokal-noetherschen Schemata über dem noetherschen Schema S , F und G zwei kontravariante Funktoren von C/S in die Kategorie der Mengen und $\phi : F \longrightarrow G$ ein Morphismus von Funktoren. Für jedes Objekt $S' \longrightarrow S$ von C/S und jedes $\alpha \in G(S')$ ist der Faser-Funktor $\phi^\alpha : (C/S)/S' \rightsquigarrow (\text{Mengen})$ definiert. Man überlegt sich sofort, daß folgende Aussage richtig ist:

Werden F und G von S -Schemata X und Y repräsentiert, dann wird ϕ induziert von einem S -Morphismus $\varphi : X \longrightarrow Y$, α entspricht einem S -Morphismus $S' \longrightarrow Y$ und der Faser-Funktor ϕ^α wird repräsentiert durch das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} S' \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array} .$$

Sei X ein S -Schema über dem noetherschen Schema S . Der Morphismus $\pi : X \longrightarrow S$ sei flach und projektiv mit integren geometrischen Fasern. Dann sind die Funktoren $\text{Div}_{X/S}$ und $\text{Pic}'_{X/S}$ repräsen-

tierbar. Der Faser-Funktor des kanonischen Morphismus

$\phi : \text{Div}_{X/S} \longrightarrow \text{Pic}'_{X/S}$ für ein lokal-noethersches S -Schema S' und eine Klasse $\lambda \in \text{Pic}'_{X/S}(S')$ ist

$\text{LinR}_{S'}^{\lambda} : (C/S)/S' \rightsquigarrow (\text{Mengen})$ mit

$\text{LinR}_{S'}^{\lambda}(T \xrightarrow{f'} S') = \text{LinR}_{S'}^{\lambda}(T) = \{D \in \text{Div}_{X/S}(T) \mid \mathcal{L}(D) \text{ und } \text{Pic}'_{X/S}(f')(\lambda)$

gehören zur selben Klasse in $\text{Pic}'_{X/S}(T)\}$

Wird $\lambda \in \text{Pic}'_{X/S}(S')$ repräsentiert durch einen invertierbaren

$\mathcal{O}_{X \times_S S'}$ -Modul $\mathcal{L}$ auf $X \times_S S'$, so gilt:

$\text{LinR}_{S'}^{\lambda}(T) = \{D \in \text{Div}_{X/S}(T) \mid \mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{T \times_S X}} \text{ lokal über } T\}$

(vgl. § 1, Definition von $\text{Pic}'_{X/S}$).

Bemerkung: Die Bezeichnung LinR für den Faser-Funktor soll an "lineare Reihe" erinnern. Für eine Kurve $X \longrightarrow \text{Spek } k$, k algebraisch abgeschlossen und ein $\lambda \in \text{Pic}(X)$, das von dem invertierbaren Modul $\mathcal{L}(D)$ eines positiven Divisors D auf X repräsentiert wird, ist nämlich $\text{LinR}_{\text{Spek } k}^{\lambda}(\text{Spek } k) = \{(f) + D \mid f \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D))\}$, die vollständige lineare Reihe von D , d.h. die Menge der positiven, zu D linear äquivalenten Divisoren auf X . Dieser kann man in natürlicher Weise den projektiven Raum $\mathbb{P}^r(k)$ als Menge zuordnen, wenn $\dim D = r+1$ ist.

Aus den vorangegangenen allgemeinen Überlegungen wissen wir, daß der Faser-Funktor $\text{LinR}_{S'}^{\lambda}$, repräsentiert wird durch das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc}
 S' \times \underline{\text{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\text{Div}_{X/S}} \underline{\text{Div}}_{X/S} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 S' & \longrightarrow & \underline{\text{Pic}}_{X/S} .
 \end{array}$$

Zur Beschreibung der Fasern von φ wird folgender Spezialfall eines allgemeinen Satzes ([9] V, Th. 4.3) bewiesen.

(2.13) Proposition: Mit den obigen Bezeichnungen wird im Fall $S' = \text{Spek } K$, K ist ein Körper, d.h. für einen K -wertigen Punkt $\text{Spek } K \rightarrow S$ von S und ein $\lambda \in \underline{\text{Pic}}'_{X/S}(\text{Spek } K)$ der Funktor $\text{Lin}_{R_{\text{Spek } K}}^{\lambda}$ repräsentiert durch den projektiven Raum $\mathbb{P}(\Gamma(X_K, \mathcal{L})')$ über K , wobei $X_K = X \times_S \text{Spek } K$ gilt, $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_{X_K}$ -Modul ist, der Repräsentant der Klasse λ ist und V' den Dualraum eines K -Vektorraumes V bedeutet.

Beweis: Wir haben also folgende Situation mit kommutativen Diagrammen für ein Objekt $f : T \rightarrow \text{Spek } K$

$$\begin{array}{ccccc}
 T \times \underline{\text{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\text{Div}_{X/S}} \text{Spek } K \times \underline{\text{Pic}}_{X/S} & \longrightarrow & \underline{\text{Div}}_{X/S} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 T & \xrightarrow{f} & \text{Spek } K & \longrightarrow & \underline{\text{Pic}}_{X/S}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 X_T = T \times_S X \longrightarrow \text{Spek } K \times_S X \longrightarrow X & & & & \\
 \downarrow \pi & & \downarrow & & \downarrow \pi \\
 T & \xrightarrow{f} & \text{Spek } K & \longrightarrow & S .
 \end{array}$$

Wegen der Voraussetzungen über π ist $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \pi_*(\mathcal{O}_X)$, und diese Eigenschaft bleibt bei Basiserweiterungen erhalten (vgl. EGA, III Korollar (7.8.8)). Dann ist die natürliche Abbildung für $T \xrightarrow{f} \text{Spek } K$

$$\{D \in \text{Div}_{X/S}(T) \mid \mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L} \otimes_K \mathcal{O}_T =: \mathcal{L}_T \text{ lokal über } T\}$$

$$\longrightarrow \Gamma(T, \pi_*(\mathcal{L}_T)^* / \mathcal{O}_T^*)$$

bijektiv. Sie ist folgendermaßen erklärt: Sei $\{U_i\}$ eine offene affine Überdeckung von T , über der $\mathcal{L}(D)$ und $\mathcal{L}_T$ isomorph sind, d.h. zu jedem i gibt es ein $f_i \in \Gamma(\pi^{-1}(U_i), \mathcal{L}_T)$, das auf allen Fasern über U_i Nicht-Nullteiler induziert (weil D relativer Divisor ist), so daß $f_i^{-1}(\mathcal{L}_T|_{\pi^{-1}(U_i)}) = \mathcal{L}(D)|_{\pi^{-1}(U_i)} \subset K_{X_T}|_{\pi^{-1}(U_i)}$. (K_X ist die Garbe von Ringen zu der Prägarbe, die auf offene affine Teilmengen durch die totalen Quotientenringe der Schnitt-
ringe von $\mathcal{O}_X$ gegeben ist.) Die f_i sind nur bis auf Einheiten aus $\Gamma(\pi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_{X_T})$ bestimmt, und über Durchschnitten $U_i \cap U_j$ stimmen sie nur bis auf Einheit aus $\Gamma(\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{O}_{X_T})$ überein, also definieren sie wegen $\pi_*(\mathcal{O}_{X_T}) \cong \mathcal{O}_T$ einen Schnitt aus $\pi_*(\mathcal{L}_T)^* / \mathcal{O}_T^*$. Dabei ist $\pi_*(\mathcal{L}_T)^*$ die Untergarbe von Mengen von $\pi_*(\mathcal{L}_T)$, deren Schnitte über $U \subset T$ Schnitte von $\mathcal{L}_T$ über $\pi^{-1}(U)$ sind, die relative Cartierdivisoren auf $\pi^{-1}(U)$ über U definieren, also Nicht-Nullteiler auf den Fasern über U induzieren. Offenbar ist diese Abbildung bijektiv. Sei $Z = \Gamma(X_K, \mathcal{L})'$. Da $T \xrightarrow{f} \text{Spek } K$ eine flache Basiserweiterung ist, gilt wegen (1.2) die "Vertauschbarkeit von direktem Bild und Basiserweiterung": es gibt einen Isomorphismus

$$\pi_*(\mathcal{L}_T) \cong f^*(\Gamma(X_K, \mathcal{L})),$$

insbesondere einen natürlichen Isomorphismus von kohärenten $\mathcal{O}_T$ -Moduln:

$$\pi_*(\mathcal{L}_T) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(f^*(Z), \mathcal{O}_T).$$

Es ist $f^*(Z)$ ein freier $\mathcal{O}_T$ -Modul. Jedes $g \in \Gamma(U, \pi_*(\mathcal{L}_T)^*)$, $U \subset T$ offen affin, gibt einen surjektiven $\Gamma(U, \mathcal{O}_T)$ -Homomorphismus $h_g: \Gamma(U, f^*(Z)) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_T)$. g induziert auf den Fasern über Punkten von U Schnitte, die nicht identisch 0 sind (die Fasern sind als integer vorausgesetzt). Deshalb ist der von h_g induzierte Vektorraumhomomorphismus $\bar{h}_g: f^*(Z)_s \otimes \mathcal{K}(s) \longrightarrow \mathcal{O}_{T,s} \otimes \mathcal{K}(s)$ für alle $s \in U$ surjektiv. Es folgt wegen der Kohärenz nach dem Lemma von Nakayama, daß h_g auf U surjektiv ist, d.h.

$(f^*(Z)|_U) / (\text{Kern } h_g)^\sim \cong \mathcal{O}_T|_U$. Nun ist g nur bis auf eine Einheit in $\Gamma(U, \mathcal{O}_T)$ bestimmt, also haben wir eine bijektive Abbildung:

$$\Gamma(T, \pi_*(\mathcal{L}_T)^* / \mathcal{O}_T^*) \xrightarrow{\sim} \{\text{invertierbare Restklassenmoduln von } f^*(Z)\}.$$

Es gibt eine kanonische Bijektion (EGA II, 4.2.3)

$$\{\text{invertierbare Restklassenmoduln von } f^*(Z)\}$$

$$\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Spek } K}^{(T, P(Z))} = \text{Hom}_{\text{Spek } K}^{(T, P(\Gamma(X_K, \mathcal{L})))}.$$

Man prüft leicht nach, daß alle angegebenen Isomorphismen mit Basiserweiterungen $T' \longrightarrow T$ verträglich sind. Deshalb repräsentiert das K -Schema $P(\Gamma(X_K, \mathcal{L})')$ den Funktor $\text{Lin } R_{\text{Spek } K}^\lambda$.

(2.14) Korollar: Die (schema-theoretischen) Fasern von

$$\gamma: \underline{\text{Div}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S} \text{ sind glatt.}$$

Beweis: Sei $s \in \underline{\text{Pic}}_{X/S}$. Betrachte im Satz (2.13) den $\alpha(s)$ -wertigen Punkt $\text{Spek } \alpha(s) \xrightarrow{\alpha} \underline{\text{Pic}}_{X/S}$. Dann folgt für die Faser $(\underline{\text{Div}}_{X/S})_s$:

$$(\underline{\text{Div}}_{X/S})_s \cong P(\Gamma(X_{\alpha(s)}, \mathcal{L})),$$

denn beide $\alpha(s)$ -Schemata repräsentieren den Faser-Funktor über $\text{Spek } \alpha(s) \xrightarrow{\alpha} \underline{\text{Pic}}_{X/S}$. Es ist aber $P(\Gamma(X_{\alpha(s)}, \mathcal{L}))$ ein glattes $\alpha(s)$ -Schema.—

(2.15) Korollar: Die zu $\text{Spek } K \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}$ gehörende Klasse wird genau dann von einem invertierbaren $\mathcal{O}_{X_K}$ -Modul $\mathcal{L}$ mit $\dim \mathcal{L} = \dim_K \Gamma(X_K, \mathcal{L}) = r \geq 1$ repräsentiert, wenn $(\underline{\text{Div}}_{X/S})_K$ ein K -Schema der Dimension $r-1$ ist.

Beweis: Es ist $\dim (\underline{\text{Div}}_{X/S})_K = \dim P(\Gamma(X_K, \mathcal{L})) = r-1$.

(2.16) Korollar: Für $d \in \mathbb{N}$ induziert die Beschränkung von

$$\gamma: \underline{\text{Div}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S} \text{ einen Morphismus } \gamma_d: \underline{\text{Div}}_{X/S}^d \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}^d.$$

Die Fasern über einem Punkt von $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d$ bezüglich γ_d bzw. γ sind gleich.

Bemerkungen: 1) In den folgenden Paragraphen wird nur der Morphismus $\gamma_d: \underline{\text{Div}}_{X/S}^d \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}^d$ von Bedeutung sein. Wir bezeichnen daher γ_d auch mit γ .

2) Die Dimensionen der Fasern von $\varphi : \underline{\text{Div}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}$ können über verschiedenen Punkten von $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ verschieden sein. Daher ist φ kein glatter Morphismus.

§ 3 Spezielle Unterschemata des "Schemas von Divisoren" einer Kurve

In diesem Paragraphen ist $\pi: X \longrightarrow S$ stets eine Kurve vom Geschlecht g über dem noetherschen Schema S . Für jede Zahl $d \in \mathbb{N}$ sind daher $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$ und $\underline{\text{Hilb}}_{X/S}^d$ kanonisch isomorph (vgl. (2.8)). Es geht hier um Unterschemata von $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$, die relative Divisoren mit bestimmten Dimensions-Eigenschaften parametrisieren. Die entsprechenden Unterschemata von $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$ werden durch Determinantenideale von Differentialmoduln beschrieben. Zur Abkürzung schreiben wir $\underline{\text{O}}_{\underline{\text{Div}}} := \underline{\text{O}}_{\underline{\text{Div}}_{X/S}^d}$ und $\underline{\text{O}}_{\underline{\text{Pic}}} := \underline{\text{O}}_{\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d}$.

In (2.7) und (2.12) haben wir gesehen, daß die Strukturmorphismen $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d \longrightarrow S$ und $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d \longrightarrow S$ glatt sind von der Faserdimension d bzw. g . Daraus ergeben sich sofort die Aussagen:

(3.1) Der Modul der Kählerschen Differentiale $\Omega_{\underline{\text{Div}}_{X/S}^d/S}$ ist lokal-frei vom Rang d auf $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$.

(3.2) Der Kählersche Differentialmodul $\Omega_{\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d/S}$ ist lokal-frei vom Rang g auf $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d$. Zur Abkürzung schreiben wir

$$\underline{\Omega}_{\underline{\text{Div}}} := \Omega_{\underline{\text{Div}}_{X/S}^d/S} \text{ und } \underline{\Omega}_{\underline{\text{Pic}}} := \Omega_{\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d/S}.$$

Aus allgemeinen Eigenschaften der Differentialmoduln (vgl. EGA0, § 20) folgt für das inverse Bild $\varphi^*(\underline{\Omega}_{\underline{\text{Pic}}})$ bezüglich des kanonischen Morphismus $\varphi: \underline{\text{Div}}_{X/S}^d \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}^d$ ($\varphi^*(\underline{\Omega}_{\underline{\text{Pic}}})$ ist ein lokal-freier $\underline{\text{O}}_{\underline{\text{Div}}}$ -Modul vom Rang g), daß φ einen $\underline{\text{O}}_{\underline{\text{Div}}}$ -Modul-Homomorphismus

$$u : \varphi^*(\Omega_{\underline{\text{Pic}}}) \longrightarrow \Omega_{\underline{\text{Div}}}$$

induziert. Weiter ist $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$ bezüglich φ ein $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d$ -Schema, es existiert $\Omega_{\underline{\text{Div}}/\underline{\text{Pic}}} := \Omega_{\underline{\text{Div}}_{X/S}^d / \underline{\text{Pic}}_{X/S}^d}$, und der Strukturhomomorphismus $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d \longrightarrow S$ induziert einen $\mathcal{O}_{\underline{\text{Div}}}$ -Homomorphismus

$$v : \Omega_{\underline{\text{Div}}} \longrightarrow \Omega_{\underline{\text{Div}} / \underline{\text{Pic}}}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

(3.3) Satz: Die Sequenz von $\mathcal{O}_{\underline{\text{Div}}}$ -Moduln

$$\varphi^*(\Omega_{\underline{\text{Pic}}}) \xrightarrow{u} \Omega_{\underline{\text{Div}}} \xrightarrow{v} \Omega_{\underline{\text{Div}} / \underline{\text{Pic}}} \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Damit haben wir eine lokal-freie Auflösung des $\mathcal{O}_{\underline{\text{Div}}}$ -Moduls $\Omega_{\underline{\text{Div}} / \underline{\text{Pic}}}$ angegeben und wollen nun zunächst ganz allgemein die Theorie der Determinantenideale auf kohärente Garben von Moduln anwenden.

Sei A ein noetherscher Ring und M ein endlicher A -Modul. Es gibt eine endliche Darstellung von M mit freien A -Moduln E und F vom Rang g bzw. d :

$$E \xrightarrow{u} F \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Sei o.B.d.A. $d \leq g$. Bezüglich fest gewählter Basen von E bzw. F wird der A -Homomorphismus u durch eine $(d \times g)$ -Matrix $\mathfrak{M}$ mit Elementen aus A beschrieben. Das r -te Determinantenideal $\mathfrak{J}_r(M)$

von M ist dann das von den Determinanten der $((d-r) \times (d-r))$ -Untermatrizen von $\mathfrak{M}$ erzeugte Ideal in A , ($0 \leq r \leq d$). Es ist unabhängig von der endlichen Darstellung, insbesondere von der Wahl der Basen und verträglich mit beliebigen Grundringerweiterungen, weil Tensorieren mit Erweiterungsringen von A ein rechts-exakter Funktor ist.

Man kann das r -te Determinantenideal $\mathfrak{J}_r = \mathfrak{J}_r(M)$ auch charakterisieren als das von den Koeffizienten der $\binom{d}{d-r} \times \binom{g}{d-r}$ -Matrix in A erzeugte Ideal, die bezüglich fest gewählter Basen den A -Homomorphismus $\bigwedge^{d-r} u : \bigwedge^{d-r} E \longrightarrow \bigwedge^{d-r} F$ beschreibt. Für die freien $A/\mathfrak{J}_r$ -Moduln $E/\mathfrak{J}_r E$ und $F/\mathfrak{J}_r F$ ist der induzierte Homomorphismus $\bigwedge^{d-r} u' : \bigwedge^{d-r} E/\mathfrak{J}_r E \longrightarrow \bigwedge^{d-r} F/\mathfrak{J}_r F$ dann identisch 0. Bei einer Grundringerweiterung $A \xrightarrow{f} B$, B noetherscher Ring, gilt für den induzierten B -Homomorphismus $\bigwedge^{d-r} f^* u : \bigwedge^{d-r} (E \otimes_A B) \longrightarrow \bigwedge^{d-r} (F \otimes_A B)$ folgende Aussage:

(3.4): Genau dann ist $\bigwedge^{d-r} f^* u = 0$, wenn es einen Ringhomomorphismus $f' : A/\mathfrak{J}_r \longrightarrow B$ gibt, so daß $f = f' \circ \pi$ ist (π bezeichnet die Restklassenabbildung $A \longrightarrow A/\mathfrak{J}_r$).

Aus $\bigwedge^{d-r} f^* u = 0$ folgt nämlich $\mathfrak{J}_r \subset \ker f$.

Die Menge $V(\mathfrak{J}_r(M)) \subset \operatorname{Spek} A$ läßt sich auch durch Eigenschaften des Moduls M charakterisieren.

(3.5) Lemma: Es ist $V(\mathfrak{J}_r(M)) = \{ x \in \operatorname{Spek} A \mid \dim_{\frac{M_x \otimes_{A_x} A_x}{\mathfrak{J}_x A_x}} \mathfrak{K}(x) \geq r+1 \}$.

Beweis: Sei $x \in V(\mathcal{J}_r(M))$, dann ist der Rang von $\overline{m}_{\mathcal{P}_x}$, der von m induzierten Matrix über $\mathfrak{x}(x)$, $\text{rg}(\overline{m}_{\mathcal{P}_x}) \leq d-(r+1)$, somit gilt für die Dimension des Kokerns $M_{\mathcal{P}_x} \otimes \mathfrak{x}(x)$:

$$\dim_{\mathfrak{x}(x)} (M_{\mathcal{P}_x} \otimes \mathfrak{x}(x)) \geq d-d+(r+1) = r+1.$$

Umgekehrt folgt für einen solchen Punkt $x \in \text{Spek } A$, daß alle Minoren der Ordnung $d-r$ von $\overline{m}_{\mathcal{P}_x}$ in $\mathfrak{x}(x)$ verschwinden, also

$\mathcal{J}_r(M) \subset \mathcal{P}_x$ gilt.—

Unter bestimmten Voraussetzungen kann folgende Aussage über die Höhe eines Determinantenideals gemacht werden:

(3.6) Lemma: Sei $\mathcal{P} \subset A$ ein Primideal. Ist $r_0 \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_0 \leq d$ mit $\mathcal{J}_{r_0}(M_{\mathcal{P}}) = A_{\mathcal{P}}$ und $\mathcal{J}_{r_0-1}(M_{\mathcal{P}}) \not\subseteq A_{\mathcal{P}}$, so gilt $\text{ht}(\mathcal{J}_{r_0-1}(M_{\mathcal{P}})) \leq r_0(g-d+r_0)$.

Bemerkungen: 1) Die Höhe eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ ist definiert als das Minimum der Höhen aller über $\mathfrak{a}$ minimalen Primideale.

2) In [6] findet man eine entsprechende Abschätzung ohne die Voraussetzung, daß ein Minor eine Einheit ist, mit allgemeineren Methoden bewiesen.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine $(d-r_0) \times (d-r_0)$ -Untermatrix von $m_{\mathcal{P}}$, der induzierten Matrix, deren Determinante eine Einheit in $A_{\mathcal{P}}$ ist. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $m_{\mathcal{P}}$ die Gestalt

$$m_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} N_0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \vdots & \vdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

hat, wobei N_0 eine $(d-r_0) \times (d-r_0)$ -Matrix ist, deren Determinante $\det(N_0) = \mu_0 \in A_{\mathcal{F}}$ eine Einheit ist. Deshalb lassen sich nach der Cramerschen Regel Koeffizienten aus $A_{\mathcal{F}}$ so bestimmen, daß man durch elementare Zeilen- und Spaltenumformung die Matrix

$$M'_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} N_0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & N \end{pmatrix}$$

erhält. Die Determinantenideale sind invariant gegenüber solchen Transformationen. Das Ideal $\mathcal{J}_{r_0-1}(M_{\mathcal{F}})$ wird also erzeugt von den Minoren $\mu_0 \cdot a_{ij}$ ($d-r_0+1 \leq i \leq d$; $d-r_0+1 \leq j \leq g$), das heißt von den $r_0(g-d+r_0)$ Elementen a_{ij} der Untermatrix N . Daraus ergibt sich mit dem Krullschen Hauptidealsatz die Behauptung. —

(3.7): Unter den Voraussetzungen von Lemma (3.6) gilt:

$$\dim(A_{\mathcal{F}} / \mathcal{J}_{r_0-1}(M_{\mathcal{F}})) \geq \dim A_{\mathcal{F}} - r_0(g-d+r_0) .$$

Determinantenideale lassen sich für Garben von Moduln verallgemeinern. Sei Y ein lokal-noethersches Schema und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Es gibt eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}$ von Y und exakte Sequenzen

$$(\mathcal{O}_Y|_{U_i})^{m_i} \xrightarrow{u_i} (\mathcal{O}_Y|_{U_i})^{n_i} \longrightarrow \mathcal{M}|_{U_i} \longrightarrow 0 .$$

Wegen der Verträglichkeit der Determinantenideale mit Lokalisieren sind dann auf den Mengen U_i Idealgarben

$\mathcal{J}_r(\mathcal{M}|_{U_i}) := \mathcal{J}_r(\Gamma(U_i, \mathcal{M}))^\sim$ definiert. Diese induzieren auf Y bis auf Isomorphie genau eine Idealgarbe $\mathcal{J}_r(\mathcal{M})$ mit

$\Gamma(U, \mathcal{I}_r(\mathcal{M})) = \mathcal{I}_r(\Gamma(U, \mathcal{M}))$ für alle offenen und affinen Teilmengen $U \subset Y$, weil die Determinantenideale unabhängig sind von der endlichen Darstellung. Die Idealgarbe $\mathcal{I}_r(\mathcal{M})$ ist kohärent.

Gibt es eine exakte Sequenz

$$\mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

mit lokal-freien $\mathcal{O}_Y$ -Moduln $\mathcal{E}$ vom Rang g und $\mathcal{F}$ vom Rang d ($d \leq g$), so erhalten wir aus den obigen Lemmata die Ergebnisse:

(3.8): 1) $\text{Tr } \mathcal{I}_r(\mathcal{M}) = \{y \in Y \mid \dim_{\kappa(y)}(\mathcal{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \kappa(y)) \geq r+1\}$.

2) Sei $y \in Y$ und $r_0 \in \mathbb{N}$ ($r_0 \leq d$) mit $\mathcal{I}_{r_0}(\mathcal{M})_y = \mathcal{O}_{Y,y}$ und $\mathcal{I}_{r_0-1}(\mathcal{M})_y \neq \mathcal{O}_{Y,y}$. Dann gilt:

a) $\text{ht}(\mathcal{I}_{r_0-1}(\mathcal{M})_y) \leq r_0(g-d+r_0)$

b) $\dim(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{I}_{r_0-1}(\mathcal{M})_y) \geq \dim \mathcal{O}_{Y,y} - r_0(g-d+r_0)$

c) $\dim(\text{Tr } \mathcal{I}_{r_0-1}(\mathcal{M})) \geq \dim \mathcal{O}_{Y,y} - r_0(g-d+r_0)$.

Die kohärente Idealgarbe $\mathcal{I}_r(\mathcal{M})$ definiert ein abgeschlossenes Unterschema $\underline{D}_r(\mathcal{M}) = (\text{Tr } \mathcal{I}_r(\mathcal{M}), \mathcal{O}_Y / \mathcal{I}_r(\mathcal{M}))$ von Y . Für $r' \geq r$ gilt $\underline{D}_{r'}(\mathcal{M}) \subset \underline{D}_r(\mathcal{M})$.

(3.9) Proposition: Mit den obigen Bezeichnungen ist für $r \geq 0$ in einem Punkt $y \in \underline{D}_{r+1}(\mathcal{M}) \subset \underline{D}_r(\mathcal{M})$ mit $\mathcal{I}_r(\mathcal{M})_y \neq (0)$ der Halm von $\underline{D}_r(\mathcal{M})$ nicht regulär-lokal.

Beweis: Sei $y \in \underline{D}_{r+1}(\mathcal{M})$. Im Punkt y sei $\text{rg } \overline{m}_{\mathcal{F}_y} = s < d-r-1$.

Durch Basistransformation wie im Beweis von (3.6) wird $m_{\mathcal{F}_y}$ auf

die Form

$$m'_{\mathcal{P}_y} = \begin{pmatrix} N_0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \vdots & N \end{pmatrix}$$

gebracht, wobei N_0 eine $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ -Matrix ist und $\det N_0 = \mu_0 \in \mathcal{O}_{Y,y}$ eine Einheit ist. Dann sind alle Koeffizienten von N aus $\mathfrak{p}_y$, also liegen alle Minoren von $m'_{\mathcal{P}_y}$ der Ordnung $\geq \mathfrak{p}+2$ in $\mathfrak{p}_y^2$, insbesondere ist $\mathcal{T}_r(\mathcal{M})_y \subset \mathfrak{p}_y^2$. Daraus folgt, daß der Halm von $\underline{D}_r(\mathcal{M})$ im Punkt y :

$$\mathcal{O}_{Y,y} / \mathcal{T}_r(\mathcal{M})_y$$

nicht regulär-lokal sein kann.—

Nehmen wir an, daß Y eine S -Schema-Struktur besitzt (S lokal-noethersch), und betrachten wir den folgenden kontravarianten Funktor von der Kategorie der lokal-noetherschen S -Schemata in die der Mengen:

$$D_r(\mathcal{M})(T) = \{ f \in \text{Hom}_S(T, Y) \mid \bigwedge^{d-r} f^* u = 0 \}$$

$$\text{mit } \bigwedge^{d-r} f^* u : \bigwedge^{d-r} f^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \bigwedge^{d-r} f^*(\mathcal{T}),$$

so gilt:

(3.10) Proposition: Das S -Schema $\underline{D}_r(\mathcal{M})$ repräsentiert den Funktor $D_r(\mathcal{M})$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß der (in T) funktorielle kanonische Morphismus

$$\mathrm{Hom}_S(T, \underline{D}_r(\mathcal{M})) \longrightarrow \{f \in \mathrm{Hom}_S(T, Y) \mid \bigwedge^{d-r} f^*u = 0\}$$

surjektiv ist, denn seine Injektivität ist offensichtlich. Sei $f \in \underline{D}_r(\mathcal{M})(T)$, $\{V_i\}_{i \in I}$ eine genügend feine offene affine Überdeckung von Y und $\{U_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$ eine ebensolche Überdeckung von T , wobei U_{ij} die $f^{-1}(V_i)$ überdecken. Nun liefert f durch Beschränken Morphismen $f_{ij} : U_{ij} \longrightarrow V_i$ mit $\bigwedge^{d-r}(f_{ij}^*u|_{V_i}) = 0$, d.h. die f_{ij} faktorisieren sich wegen (3.4) über $\underline{D}_r(\mathcal{M}) \cap V_i$, also ist auch $f \in \mathrm{Hom}_S(T, \underline{D}_r(\mathcal{M}))$. —

Wir kommen nun wieder zu unserer speziellen Situation zurück.

Sei wie oben $\pi : X \longrightarrow S$ eine Kurve über dem noetherschen Schema S vom Geschlecht g und $d \leq g$, $d \in \mathbb{N}$. Das von der kohärenten Idealgarbe $\mathcal{V}_{r-2}(\Omega_{\mathrm{Div}/\mathrm{Pic}})$ ($r \geq 2$) in $\underline{\mathrm{Div}}_X^d/S$ beschriebene abgeschlossene Unterschema $\underline{D}_{r-2}(\Omega_{\mathrm{Div}/\mathrm{Pic}})$ bezeichnen wir in diesem Spezialfall mit $F_r(X, d)$. Die allgemein hergeleiteten Eigenschaften übertragen sich entsprechend, insbesondere gilt wegen (3.8) 1) für die $F_r(X, d)$ zugrundeliegende Punktmenge:

$$(3.11): F_r(X, d) =$$

$$\{x \in \underline{\mathrm{Div}}_X^d/S \mid \dim_{\mathcal{K}(x)}((\Omega_{\mathrm{Div}/\mathrm{Pic}})_x \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Div}, x}} \mathcal{K}(x)) \geq r-1\}.$$

Bemerkung: $F_r(X, d)$ ist nur für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ definiert.

Das S -Schema $F_r(X, d)$ hat folgende Eigenschaft:

(3.12) Proposition: Sei K ein Körper, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ und $d \in \mathbb{N}$, $d \leq g$. Ein K -wertiger Punkt von $\underline{\mathrm{Div}}_X^d/S$ über S

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spek } K & \xrightarrow{\alpha} & \underline{\text{Div}}_{X/S}^d \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & S &
 \end{array}$$

induziert auf der zugehörigen Kurve $X \times_S \text{Spek } K$ über $\text{Spek } K$ genau dann einen positiven Divisor vom Grad d und mit einer Dimension $\geq r$, wenn sich α über $F_r(X, d)$ faktorisieren läßt.

Beweis: Sei $x \in \underline{\text{Div}}_{X/S}^d$ der Bildpunkt von α . Gibt es einen K -wertigen Punkt α' von $F_r(X, d)$ über S

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spek } K & \xrightarrow{\alpha'} & F_r(X, d) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & S &
 \end{array},$$

so daß das Diagramm mit der kanonischen Inklusion kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spek } K & \xrightarrow{\alpha} & \underline{\text{Div}}_{X/S}^d \\
 \alpha' \searrow & & \swarrow \iota \\
 & F_r(X, d) &
 \end{array},$$

dann gilt $\dim_{\alpha(x)}((\Omega_{\underline{\text{Div}}/\underline{\text{Pic}}})_x \otimes_{\mathcal{O}_{\underline{\text{Div}}, x}} \alpha(x)) = t_x \geq r-1$.

Die Komposition von α mit dem kanonischen Morphismus

$\varphi: \underline{\text{Div}}_{X/S}^d \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}^d$ gibt einen K -wertigen Punkt $\varphi \circ \alpha$ von $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d$ mit dem Bildpunkt $y = \varphi(x)$. Wir betrachten die Faser $(\underline{\text{Div}}_{X/S}^d)_K$ in dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\underline{\text{Div}}_{X/S}^d)_K := \text{Spek } K \times_{\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d} \underline{\text{Div}}_{X/S}^d & \longrightarrow & \text{Spek } \mathfrak{x}(y) \times_{\underline{\text{Pic}}_{X/S}^d} \underline{\text{Div}}_{X/S}^d & \longrightarrow & \underline{\text{Div}}_{X/S}^d \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \text{Spek } K & \xrightarrow{\quad} & \text{Spek } \mathfrak{x}(y) & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Pic}}_{X/S}^d \\
 & & \varphi \circ \alpha & &
 \end{array}$$

Wegen (2.14) ist $\text{Spek } \mathfrak{x}(y) \times \underline{\text{Div}}_{X/S}^d$ ein glattes $\mathfrak{x}(y)$ -Schema, sein $\mathfrak{x}(y)$ -Differentialmodul $(\Omega_{\underline{\text{Div}}/\underline{\text{Pic}}})_y$ wird von $\Omega_{\underline{\text{Div}}/\underline{\text{Pic}}}$ induziert und ist lokalfrei vom Rang t_x nach dem Lemma von Nakayama. Folglich ist $(\underline{\text{Div}}_{X/S}^d)_K$ glatt über K mit lokal-freiem K -Differentialmodul vom Rang t_x . Deshalb ist $\dim (\underline{\text{Div}}_{X/S}^d)_K = t_x \geq r-1$, und nach Korollar (2.15) hat der von α induzierte Divisor die Dimension $t_x + 1 \geq r$. Wird umgekehrt von α auf X_K ein Divisor der Dimension $t'_x \geq r$ induziert, so ist wieder nach Korollar (2.15) $\dim (\underline{\text{Div}}_{X/S}^d)_K = t'_x - 1$ und es folgt mit dem Lemma von Nakayama

$$\dim_{\mathfrak{x}(x)} ((\Omega_{\underline{\text{Div}}/\underline{\text{Pic}}})_x \otimes_{\mathcal{O}_{\underline{\text{Div}},x}} \mathfrak{x}(x)) = t'_x - 1 \geq r - 1.$$

Somit ist $x \in F_r(X, d)$, d.h. α faktorisiert sich über $F_r(X, d)$. —

(3.13) Korollar: Durch α wird auf X_K genau dann ein positiver Divisor vom Grad d und der Dimension r induziert, wenn $x \in (F_r(X, d) \setminus F_{r+1}(X, d))$ ist.

Beweis: Es ist in diesem Fall $t_x = r - 1$.

(3.14) Korollar: Durch α wird auf X_K genau dann ein positiver Divisor vom Grad d und der Dimension r induziert, wenn $\mathfrak{m}$ an der

Stelle x genau den Rang $d-r+1$ hat ($\mathcal{M}$ bezeichnet eine Matrix, die den Modulhomomorphismus u in einer Umgebung von x beschreibt).

Beweis: Unmittelbare Folgerung aus (3.13) und der Definition der Determinantenideale.—

Aus (3.10) ergibt sich unmittelbar eine funktorielle Eigenschaft von $F_r(X, d) \subset \underline{\text{Div}}_{X/S}^d$:

(3.15): Das Unterschema $F_r(X, d)$ repräsentiert den kontravarianten Funktor $D_{r-2}(\Omega_{\underline{\text{Div}}/\underline{\text{Pic}}})$ mit

$$D_{r-2}(\Omega_{\underline{\text{Div}}/\underline{\text{Pic}}})(T) = \{ f \in \text{Hom}_S(T, \underline{\text{Div}}_{X/S}^d) \mid \bigwedge^{d-r+2} f^*u = 0 \} .$$

Bemerkung: Definiert man den kontravarianten Funktor $\underline{\text{Div}}_{X/S}^{d,r}$, als den Unterfunktor von $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$, der jedem $T \rightarrow S$ die Menge der relativen Divisoren auf $T \times_S X \rightarrow T$ zuordnet, mit dem Grad d und einer Dimension $\geq r$ auf jeder Faser, so wird er i.a. nicht von $F_r(X, d)$ repräsentiert, denn ein S -Morphismus $T \rightarrow \underline{\text{Div}}_{X/S}^d$ entspricht genau dann einem Divisor aus $\underline{\text{Div}}_{X/S}^{d,r}(T)$, wenn das Bild von T in $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$ als Menge in $F_r(X, d)$ enthalten ist.

Wir erhalten folgende Dimensionsabschätzung, falls $\dim \underline{\text{Div}}_{X/S}^d < \infty$ ist:

(3.16) Proposition: Sei x ein abgeschlossener Punkt in $\underline{\text{Div}}_{X/S}^d$, dessen Halm maximale Dimension hat. Ist $x \in F_r(X, d) \setminus F_{r+1}(X, d)$, so gilt

$$\dim F_r(X, d) \geq rd - (g+r-1)(r-1) + \dim S.$$

Beweis: Mit (3.8) c), (2.4) und (2.6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dim F_r(X, d) &\geq \dim \mathcal{O}_{\text{Div}, x} - (r-1)(g-d+r-1) \\ &\geq d - (r-1)(g-d+r-1) + \dim S \\ &\geq rd - (r-1)(g+r-1) + \dim S \end{aligned}$$

wegen der Wahl von $x \in \text{Div}_{X/S}^d$. —

Bemerkungen: 1) Benutzt man die erwähnte Abschätzung aus [6], so braucht man statt $x \in F_r(X, d) \setminus F_{r+1}(X, d)$ nur " $x \in F_r(X, d)$ " voranzusetzen.

2) Ist $S = \text{Spek } K$, K ein algebraisch-abgeschlossener Körper, so genügt es, " $F_r(X, d) \not\supseteq F_{r+1}(X, d)$ " voranzusetzen, denn man findet dann in $F_r(X, d) \setminus F_{r+1}(X, d)$ einen abgeschlossenen Punkt. Bei Anwendung von [6] reicht " $F_r(X, d) \neq \emptyset$ " als Voraussetzung.

§ 4 Natürliche Einbettungen von Kurven in einen projektiven Raum

Bisher haben wir mit dem Hilbertschema einer Kurve $X \longrightarrow S$ relative Divisoren, also bestimmte abgeschlossene Unterschemata von X parametrisiert. Jetzt soll das Hilbertschema des projektiven Raumes $\mathbb{P}^m = \text{Proj } \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_m]$ dazu dienen, in $\mathbb{P}^m \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$ abgeschlossen eingebettete Kurven $\pi: X \longrightarrow S$ zu parametrisieren. Die Einbettung erhält man aus der Existenz sehr reicher Moduln auf X bezüglich π .

Zunächst befassen wir uns deshalb ganz allgemein mit sehr reichen Moduln und beweisen als Hilfsmittel folgende Aussage (vgl. EGA III (4.6.7)):

(4.1) Proposition: Seien Z ein lokal-noethersches Schema, X und Y zwei Z -Schemata mit eigentlichen Strukturmorphismen $g: X \longrightarrow Z$ und $h: Y \longrightarrow Z$. Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Z -Morphismus und für ein $z \in Z$ sei $f_z: X_z \longrightarrow Y_z$ der auf den Fasern induzierte Morphismus. Ist f_z ein endlicher Morphismus (bzw. eine abgeschlossene Einbettung), dann gibt es eine offene Umgebung U von z , so daß die Beschränkung von f auf $g^{-1}(U) \longrightarrow h^{-1}(U)$ endlich (bzw. eine abgeschlossene Einbettung) ist.

Beweis: Nach Voraussetzung ist f eigentlich.

Ist f_z endlich, so folgt mit "Zariskis Hauptsatz" und EGA III

(4.4.11), daß zu jedem $y \in h^{-1}(z)$ eine offene Umgebung $V_y \subset Y$ existiert, so daß $f^{-1}(V_y) \longrightarrow V_y$ quasi-endlich, also endlich ist. Da g und h eigentlich sind, ist dann auch $g^{-1}(U) \longrightarrow h^{-1}(U)$ endlich für eine Umgebung U von z .

In dem Fall, daß f_z eine abgeschlossene Einbettung ist, können wir also annehmen, daß f endlich ist. Folglich ist für eine offene affine Umgebung V_y von $y \in h^{-1}(z)$ der zu f gehörende Homomorphismus $\Gamma(V_y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V_y), \mathcal{O}_X)$ endlich. Da f_z eine abgeschlossene Einbettung ist, ist der induzierte Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Z,z}} \kappa(z) \longrightarrow (\Gamma(f^{-1}(V_y), \mathcal{O}_X))_S \otimes_{\mathcal{O}_{Z,z}} \kappa(z)$$

surjektiv (S ist das Bild des multiplikativen Systems

$$\Gamma(V_y, \mathcal{O}_Y) \setminus \mathfrak{p}_y \text{ in } \Gamma(f^{-1}(V_y), \mathcal{O}_X)).$$

Mit dem Lemma von Nakayama folgt wegen der Kohärenz des Kokerns unsere Behauptung. —

(4.2) Proposition: Sei Y ein lokal-noethersches Schema,

$f: X \longrightarrow Y$ ein flacher und eigentlicher Morphismus von Schemata.

Sei $\mathcal{F}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$ -Modul und $y \in Y$ ein Punkt. Ist $\mathcal{F}_y$ auf X_y ein sehr reicher Modul mit $H^1(X_y, \mathcal{F}_y) = (0)$, so gibt es eine offene Umgebung U von y , so daß $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$ sehr reich ist über U bezüglich der Beschränkung von f .

Beweis: Wegen (1.1) c) ist $f_*(\mathcal{F})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)$ isomorph zu

$\Gamma(X_y, \mathcal{F}_y)$. Nun wird $\mathcal{F}_y$ von seinen globalen Schnitten erzeugt,

also ist der kanonische Homomorphismus kohärenter Moduln

$f^*(f_*(\mathcal{F})) \longrightarrow \mathcal{F}$ auf X_y surjektiv. Folglich ist er in einer

Umgebung von X_y der Form $f^{-1}(U)$, U Umgebung von $y \in Y$, wegen der

Kohärenz des Kokerns surjektiv nach dem Lemma von Nakayama. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß $f^*(f_*(\mathcal{F})) \longrightarrow \mathcal{F}$ surjektiv ist. Dann gibt es einen Y -Morphismus

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & P(f_*(\mathcal{F})) =: P \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & Y & \end{array},$$

und es ist der induzierte Morphismus i_y gerade die von $\mathcal{F}_y$ und $f_y^*(f_{y*}(\mathcal{F}_y)) \longrightarrow \mathcal{F}_y$ definierte abgeschlossene Einbettung:

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{i_y} & (P(f_*(\mathcal{F})))_y = P_y = P(f_*(\mathcal{F}))_y \otimes \kappa(y) \\ & \searrow f_y & \swarrow \\ & \text{Spek } \kappa(y) & \end{array}$$

Da i_y eine abgeschlossene Einbettung ist, gibt es nach (4.1) eine offene Umgebung U von y , so daß auch die Beschränkung von i auf $f^{-1}(U) \longrightarrow p^{-1}(U)$ eine abgeschlossene Einbettung ist.—

(4.3) Korollar: Ist für jedes $y \in Y$ der Modul $\mathcal{F}_y$ sehr reich auf X_y und gilt $H^1(X_y, \mathcal{F}_y) = (0)$, dann ist $\mathcal{F}$ sehr reich über Y bezüglich f .

Die Fasern einer Kurve über einem Schema S vom Geschlecht $g \geq 2$ sind Kurven $X \longrightarrow \text{Spek } K$, K bezeichnet einen Körper, mit Geschlecht $g \geq 2$. Eine reiche Garbe auf X über K ist der Modul der Kählerschen Differentiale $\Omega_{X/K}$. Mit dem Satz von Riemann-Roch folgt, daß $H^1(X, \Omega_{X/K}^{\otimes v}) = (0)$ gilt für $v \geq 2$ und $\Omega_{X/K}^{\otimes v}$ für $v \geq 3$ sehr reich ist über $\text{Spek } K$.

Sei nun $\pi : X \longrightarrow S$ eine Kurve über dem lokal-noetherschen Schema S vom Geschlecht $g \geq 2$. Es ist $\Omega_{X/S}$ der $\mathcal{O}_X$ -Modul der Kählerschen Differentiale von X über S .

(4.4) Proposition: Für $v \geq 2$ ist der $\mathcal{O}_S$ -Modul $\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes v})$ lokal-frei vom Rang $(2v-1)(g-1)$. Gilt $v \geq 3$, so ist $\Omega_{X/S}^{\otimes v}$ ein sehr reicher $\mathcal{O}_X$ -Modul bezüglich π über S .

Beweis: Nach Satz (1.1) ist $\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes v})$ für $v \geq 2$ lokal-frei auf S , denn für alle $s \in S$ gilt $H^1(X_s, (\Omega_{X/S}^{\otimes v})_s) = (0)$, falls $v \geq 2$ ist. Insbesondere kommutiert "Direktes-Bild-Nehmen" mit Basiserweiterung, also gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes v}))_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \kappa(s) \longrightarrow \Gamma(X_s, (\Omega_{X/S}^{\otimes v})_s)$$

für $v \geq 2$. Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt aber auf der Faser X_s

$$\dim_{\kappa(s)} \Gamma(X_s, (\Omega_{X/S}^{\otimes v})_s) = (2v-1)(g-1)$$

für $v \geq 2$. Mit dem Lemma von Nakayama folgt dann die Behauptung über den Rang von $\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes v})$, $v \geq 2$. Aus dem Korollar (4.3) ergibt sich sofort, daß $\Omega_{X/S}^{\otimes v}$ sehr reich ist für $v \geq 3$.—

Im Fall $v \geq 3$ erhalten wir:

(4.5) Korollar:

a) Es gibt eine abgeschlossene Einbettung von X in das projektive Schema $P := P(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes v}))$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\iota} & P \\
 \pi \searrow & & \nearrow p \\
 & S &
 \end{array}$$

mit $\iota^*(\mathcal{O}_P(1)) \cong \Omega_{X/S}^{\otimes \nu}$ für $\nu \geq 3$.

- b) Die Fasern X_s von $X \rightarrow S$, $s \in S$, aufgefaßt als abgeschlossene Unterschemata von $P_s = P(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes \nu})) \times_S \text{Spek } \mathfrak{K}(s)$ haben alle das Hilbertpolynom

$$P_g(n) = (2g-2)\nu n + (1-g) = (2\nu n - 1)(g-1) \quad \text{für } \nu \geq 3.$$

- c) Für die von ι induzierte Inklusion der Fasern

$$\begin{array}{ccc}
 X_s & \xrightarrow{\iota_s} & P_s \cong P(\Gamma(X_s, \Omega_{X_s/\mathfrak{K}(s)}^{\otimes \nu})) \\
 \pi_s \searrow & & \nearrow p_s \\
 & \text{Spek } \mathfrak{K}(s) &
 \end{array}$$

sind $\Omega_{X_s/\mathfrak{K}(s)}^{\otimes \nu}$ und $\iota_s^*(\mathcal{O}_{P_s}(1))$ isomorphe $\mathcal{O}_{X_s}$ -Moduln, und der kanonische $\mathfrak{K}(s)$ -Homomorphismus

$$\Gamma(P_s, \mathcal{O}_{P_s}(1)) \longrightarrow \pi_{s*}(\iota_s^*(\mathcal{O}_{P_s}(1))) = \Gamma(X_s, \Omega_{X_s/\mathfrak{K}(s)}^{\otimes \nu}),$$

der einen globalen Schnitt von $\mathcal{O}_{P_s}(1)$ auf den induzierten Schnitt in $\Gamma(X_s, \Omega_{X_s/\mathfrak{K}(s)}^{\otimes \nu})$ abbildet, ist ein Isomorphismus.

Beweis: Wegen (4.4) existiert eine Einbettung ι mit

$\iota^*(\mathcal{O}_P(1)) \cong \Omega_{X/S}^{\otimes \nu}$. Da π nach Voraussetzung eigentlich ist und p separiert ist, folgt, daß ι ebenfalls eigentlich ist.

Damit ist a) gezeigt.

Zum Beweis von b) ist das Hilbertpolynom der trivialen Fortsetzung $\tilde{\mathcal{O}}_{X_s}$ von $\mathcal{O}_{X_s}$ auf P_s als Restklassenmodul von $\mathcal{O}_{P_s}$ zu berechnen für $s \in S$. Wegen der Isomorphie

$$(\iota^*(\mathcal{O}_P(1)))_s \cong (\Omega_{X/S}^{\otimes \nu})_s$$

folgt aber aus dem Satz von Riemann-Roch für große n :

$$\begin{aligned} P_{\tilde{\mathcal{O}}_{X_s}}(n) &= \dim_{\mathfrak{K}(s)} \Gamma(P_s, \tilde{\mathcal{O}}_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{P_s}} (\mathcal{O}_P(n))_s) \\ &= \dim_{\mathfrak{K}(s)} \Gamma(X_s, (\Omega_{X/S}^{\otimes \nu})_s^{\otimes n}) \\ &= (2g-2)\nu n + 1-g. \end{aligned}$$

Also gilt

$$P_g(n) := P_{\tilde{\mathcal{O}}_{X_s}}(n) = (2\nu n - 1)(g-1)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Die Aussage von c) folgt unmittelbar, denn die kanonischen globalen Schnitte von $\mathcal{O}_{P_s}(1)$ entsprechen gerade den durch ι_s ausgezeichneten $\mathfrak{K}(s)$ -Basis-Elementen von $\Gamma(X_s, \Omega_{X_s/\mathfrak{K}(s)}^{\otimes \nu})$. — Deshalb erscheint es sinnvoll, Kurven $\pi: X \longrightarrow S$ vom Geschlecht $g \geq 2$ zu betrachten, die abgeschlossene Unterschemata von $P^m \times_{\mathbb{Z}} S$ sind ($m = (2\nu - 1)(g-1) - 1$, $\nu \geq 3$), wobei die Fasern dieses abgeschlossenen Unterschemas alle das Hilbertpolynom $P_g(n) = (2\nu n - 1)(g-1)$ haben. Also kann man $X \longrightarrow S$ nicht nur als Element der Menge $\text{Hilb}_{P^m/\mathbb{Z}}(S)$, sondern sogar von $\text{Hilb}_{P^m/\mathbb{Z}}^g(S)$ auffassen.

Einfache Beispiele dafür sind Kurven $\pi: X \longrightarrow S$, $g \geq 2$, für die ein S -Isomorphismus $P(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes \nu})) \longrightarrow P^m \times_{\mathbb{Z}} S$, $\nu \geq 3$,

existiert, also insbesondere Kurven mit freiem $\mathcal{O}_S$ -Modul $\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes \nu})$ und Kurven $X \longrightarrow \text{Spek } K$ über einem Körper K .

Sei $m = (2\nu - 1)(g - 1) - 1$ und $\nu \geq 3$, $g \geq 2$.

Offenbar ist der Funktor $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$ nach Satz (1.3) repräsentierbar. Es existiert also ein universelles Objekt über $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$, nämlich das zur Identität von $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$ gehörende abgeschlossene Unterschema V von $\mathbb{P}^m \times_{\mathbb{Z}} \text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$. Dieses ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Seine Fasern haben sämtlich das Hilbertpolynom $\mathbb{P}_g$. Wegen $\text{grad } \mathbb{P}_g = 1$ sind sie also 1-dimensionale projektive Schemata über den Restkörpern von $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$. Durch Beschränken erhält man aus V eine in folgendem Sinn universelle Kurve über einem lokal-abgeschlossenen Unterschema von $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$:

(4.6) Proposition: Es gibt ein eindeutig bestimmtes Unterschema H_g^ν von $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$ mit der Eigenschaft: Ein Morphismus $f: S \longrightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}$ (S lokal-noethersches Schema) faktorisiert sich genau dann über H_g^ν , wenn für das von f induzierte Unterschema

$$\begin{array}{ccc} X := S \times_{\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}_g}} V & \xhookrightarrow{\iota} & S \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

gilt:

- i) X ist eine Kurve über S vom Geschlecht g .
- ii) Die $\mathcal{O}_X$ -Moduln $\Omega_{X/S}^{\otimes \nu}$ und $\iota^*(\mathcal{O}_{S \times \mathbb{P}^m}(1))$ sind lokal über S isomorph.

iii) Für jedes $s \in S$ liegt die Faser X_s so in

$(\mathbb{P}^m \times S) \times_S \text{Spek } \mathfrak{K}(s) = \mathbb{P}^m(\mathfrak{K}(s))$, daß der von dem kanonischen $\mathcal{O}_S$ -Modul-Homomorphismus

$$\Gamma(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes \mathcal{O}_X)$$

induzierte $\mathfrak{K}(s)$ -Vektorraumhomomorphismus

$$\Gamma(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \otimes \mathfrak{K}(s) \longrightarrow \Gamma(X_s, \Omega_{X_s}^{\otimes \nu} / \mathfrak{K}(s))$$

ein Isomorphismus ist.

Bemerkung: Eine in $\mathbb{P}^m \times S$ eingebettete Kurve über S , die den Bedingungen ii) und iii) genügt, heißt ν -kanonisch eingebettet.

Beweis: (Mumford) Die Menge der glatten Punkte von

$V \xrightarrow{\chi} \underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}^g}$ ist offen in V . Da χ eigentlich ist (sogar projektiv), ist auch die Menge der Punkte von $\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}^g}$, deren Fasern in V glatt sind, eine offene Teilmenge U_1 von $\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}^g}$. Auch die Menge U_2 der Punkte von $\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}^g}$, über denen die geometrischen Fasern von V zusammenhängend sind, ist offen in $\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}^g}$, denn nach "Zariskis Satz über den Zusammenhang" (EGA III (4.3.1)) und EGA III (4.3.4) ist U_2 genau die Teilmenge, wo $\chi_*(\mathcal{O}_V)$ isomorph zu $\mathcal{O}_{\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}^g}}$ ist. Wegen der Kohärenz von $\chi_*(\mathcal{O}_V)$ ist U_2 offen. Da Dimension und Geschlecht der Fasern durch das Hilbertpolynom festgelegt sind, ist $X \longrightarrow S$ also genau dann eine Kurve vom Geschlecht g über S , wenn sich f über das offene Unterschema $U = U_1 \cap U_2 \subset \underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{\mathbb{P}^g}$ faktorisiert.

Sei nun $V_1 = U \times_{\text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^g} V \subset U \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m$ und $\mathcal{L}$ die Beschränkung von $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}^m}(1)$ auf V_1 . Das abgeschlossene Unterschema $V_1 \subset U \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m$ ist die universelle Kurve über U . Nach (1.7) existiert das Picard-Schema $\text{Pic}_{V_1/U}$. Die invertierbaren $\mathcal{O}_{V_1}$ -Moduln $\mathcal{L}$ und $\Omega_{V_1/U}^{\otimes \nu}$ definieren beide Morphismen $1, \omega_\nu : U \longrightarrow \text{Pic}_{V_1/U}$.

Bedingung ii) gilt für $X \longrightarrow S$ mit dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 X \cong S \times_U V_1 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S & \xrightarrow{\quad} & U & \xrightarrow{\quad} & \text{Hilb}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^g \\
 & & & \searrow f & \\
 & & & & \text{Pic}_{V_1/U}
 \end{array}$$

genau dann, wenn $\Omega_{X/S}^{\otimes \nu}$ und $i^*(\mathcal{O}_{S \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m}(1))$ in $\text{Pic}'_{X/S}(S)$ dieselbe Äquivalenzklasse induzieren. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß

$$\omega_\nu \cdot f = 1 \cdot f : S \longrightarrow \text{Pic}_{V_1/U}$$

gilt, denn die beiden Moduln sind die inversen Bilder von $\Omega_{V_1/U}^{\otimes \nu}$ bzw. $\mathcal{L}$. Sei U' das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc}
 U' & \longrightarrow & U \\
 \downarrow & & \downarrow (1, \omega_\nu) \\
 \text{Pic}_{V_1/U} & \xrightarrow{\Delta} & \text{Pic}_{V_1/U} \times_U \text{Pic}_{V_1/U}
 \end{array}
 ,$$

wobei Δ den Diagonalmorphismus bezeichnet. Da $\text{Pic}_{V_1/U}$ separiert ist über U , ist Δ eine abgeschlossene Einbettung. Deshalb ist U' ein abgeschlossenes Unterschema von U . Genau dann faktorisiert

sich f über U' , wenn $\omega_v \circ f = 1 \circ f$ gilt, d.h. wenn Bedingung ii) erfüllt ist.

Setze $V'_1 = V_1 \times_U U'$ und $\mathcal{L}'$ gleich der Beschränkung von $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}^m}(1) \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{U'} = \mathcal{O}_{U' \times \mathbb{P}^m}(1)$ auf V'_1 . Es ist dann $\mathcal{L}'$ das inverse Bild von $\mathcal{L}$ auf V'_1 bezüglich $p_1: V_1 \times_U U' \longrightarrow V_1$.

Zur Bedingung iii) betrachten wir den kanonischen Homomorphismus

$$h: \Gamma(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \otimes_{\mathcal{O}_{U'}} \longrightarrow p_{2*}(\mathcal{L}'),$$

der lokal durch $g \otimes a \longrightarrow a \cdot \bar{g}$

gegeben ist, wobei $\bar{g}$ den von g in $p_{2*}(\mathcal{L}')$ induzierten Schnitt bezeichnet und $p_2: V_1 \times_U U' \longrightarrow U'$ der Strukturmorphismus von V'_1 ist. Nun ist wegen (1.1) $p_{2*}(\mathcal{L}')$ ein lokal-freier Modul vom Rang $m+1$, und für jedes $s \in U'$ ist

$$\begin{aligned} p_{2*}(\mathcal{L}')_s \otimes \kappa(s) &\cong \Gamma(V'_{1s}, \mathcal{L}'_s) \\ &\cong \Gamma(V'_{1s}, \Omega_{V'_{1s}/\kappa(s)}^{\otimes v}) , \end{aligned}$$

denn es gilt $H^1(V'_{1s}, \mathcal{L}'_s) \cong H^1(V'_{1s}, \Omega_{V'_{1s}/\kappa(s)}^{\otimes v}) = (0)$.

Sei $\mathcal{F}$ der Kokern von h . Für $s \in U'$ gilt $\mathcal{F}_s \otimes \kappa(s) \neq (0)$ genau dann, wenn der Vektorraum-Homomorphismus h_s

$$\begin{array}{c} \Gamma(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \otimes \kappa(s) \longrightarrow \Gamma(V'_{1s}, \mathcal{L}'_s) \cong \Gamma(V'_{1s}, \Omega_{V'_{1s}/\kappa(s)}^{\otimes v}) \\ \hline h_s \end{array}$$

nicht surjektiv ist. Da beides $\kappa(s)$ -Vektorräume der Dimension $m+1$ sind, ist h_s genau dann auch nicht bijektiv. Mit dem Lemma

von Nakayama folgt, daß die offene Teilmenge U'' von U' , wo $\mathcal{F} = 0$ gilt, genau die Menge von Punkten in U' ist, deren Fasern in V'_1 die Bedingung iii) erfüllen. Also gilt Bedingung iii) genau dann für die Fasern X_s über allen Punkten $s \in S$, wenn sich f auch noch über U'' faktorisiert.

Wir setzen $H_g^\vee := U''$ und $V_g^\vee := V'_1 \times_{U'} U''$. Offenbar ist $H_g^\vee$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. —

(4.7) Bemerkung: Bedingung iii) ist gleichbedeutend mit iii)': Für jedes $s \in S$ und jeden algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper K von $\kappa(s)$ gilt für die geometrische Faser X_K , daß der induzierte K -Vektorraumhomomorphismus

$$\Gamma(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \otimes K \xrightarrow{h_K} \Gamma(X_K, \Omega_{X_K/K}^{\otimes \nu})$$

ein Isomorphismus ist.

Bedingung iii)' heißt anschaulich: Die Kurve X_K liegt so in $\mathbb{P}^m(K)$ eingebettet, daß sie in keiner Hyperebene von $\mathbb{P}^m(K)$ enthalten ist.

Ist nämlich h_K nicht bijektiv, so ist es auch nicht injektiv, und die Schnitte $s_0, \dots, s_m \in \Gamma(X_K, \Omega_{X_K/K}^{\otimes \nu})$, die die Einbettung von X_K in $\mathbb{P}^m(K)$ definieren, sind als Bilder einer Basis von $\Gamma(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \otimes K$ bezüglich h_K linear abhängig.

Wir werden nur zwei einfache Folgerungen dieses Satzes benutzen:

(4.8) Korollar: Sei K ein Körper.

- a) Ist $\text{Spek } K \longrightarrow \mathbb{H}_g^\vee$ ein K -wertiger Punkt, so ist die induzierte Kurve

$$\begin{array}{ccc} X_K := \text{Spek } K \times_{\mathbb{H}_g^\vee} V_g^\vee & \longrightarrow & V_g^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spek } K & \longrightarrow & \mathbb{H}_g^\vee \end{array}$$

eine in $\mathbb{P}^m(K)$ ν -kanonisch eingebettete Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ über K .

- b) Ist $X \longrightarrow \text{Spek } K$ eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, dann gibt es einen K -wertigen Punkt $\text{Spek } K \longrightarrow \mathbb{H}_g^\vee$, so daß X und $\text{Spek } K \times_{\mathbb{H}_g^\vee} V_g^\vee$ isomorphe Kurven über K sind.

Beweis: Zu a) ist nichts zu beweisen. In b) läßt sich X ν -kanonisch in $\mathbb{P}^m(K)$ einbetten, und es gibt einen zugehörigen Morphismus $\text{Spek } K \longrightarrow \underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^m/\mathbb{Z}}^{Pg}$. Dieser faktorisiert sich aber über $\mathbb{H}_g^\vee$.—

Anhang: Bemerkung zur Bedeutung des Unterschemas $\underline{H}_g^\vee$
für das Modulproblem für Kurven

Zunächst tragen wir zu dem Abschnitt über den Picard-Funktor
in § 1 folgendes nach:

(4.9) Lemma: Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata mit
 $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$. Dann ist die Sequenz mit den natürlichen
Homomorphismen

$$0 \longrightarrow \text{Pic}(Y) \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}'(X/Y)$$

exakt.

Beweis: Die angegebene Sequenz ist ein Teil der Leray-Spektral-
sequenz mit $E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_*(\mathcal{O}_X^*))$ für $\mathcal{O}_X$ und f :

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow E_2^{01} \longrightarrow \dots$$

Also ist sie exakt. Man kann (4.9) auch direkt durch Rechnen
mit lokalen Gleichungen analog zu (2.13) beweisen.—

Das Lemma besagt, daß sich zwei invertierbare $\mathcal{O}_X$ -Moduln $\mathcal{L}_1$
und $\mathcal{L}_2$, die beide in $\text{Pic}'(X/Y)$ zur selben Äquivalenzklasse
gehören, also über Y lokal isomorph sind, gerade um einen in-
vertierbaren $\mathcal{O}_Y$ -Modul unterscheiden, d.h. es gibt einen Iso-
morphismus $\mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_2$ von $\mathcal{O}_X$ -Moduln.

Eine Kurve $\pi: X \longrightarrow S$ vom Geschlecht $g \geq 2$ heißt ν -kanonisch,
 $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 3$, wenn ein S -Isomorphismus $P(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes \nu})) \longrightarrow P^m \times_{\mathbb{Z}} S$,
 $m = (2\nu - 1)(g - 1) - 1$, existiert.

Wir beschränken uns nun auf den Fall 3-kanonischer Kurven und setzen $H_g := H_g^3$ und $V_g := V_g^3$. Für $g > 3$ gelten die Überlegungen entsprechend. Als Funktor der 3-kanonischen Kurven vom Geschlecht g bezeichnen wir den kontravarianten Funktor H_g von der Kategorie der lokal-noetherschen Schemata in die der Mengen:

$$H_g(S) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von Kurven } \pi: X \longrightarrow S \text{ vom Geschlecht} \\ g \geq 2 \text{ mit } S\text{-Isomorphismen } \mathbb{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3})) \longrightarrow \mathbb{P}^{5g-6}_{X_Z} S \end{array} \right\}.$$

(4.10) Proposition: Der Funktor H_g wird repräsentiert durch das Schema H_g .

Beweis: Es werden funktorielle Abbildungen

$$\gamma_1 : \text{Hom}(S, H_g) \longrightarrow H_g(S) \quad \text{und}$$

$$\gamma_2 : H_g(S) \longrightarrow \text{Hom}(S, H_g)$$

angegeben, die zueinander invers sind.

Sei $f \in \text{Hom}(S, H_g)$. Man erhält das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P := S \times_Z \mathbb{P}^{5g-6} & \longrightarrow & H_g \times_Z \mathbb{P}^{5g-6} \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ X := S \times_{H_g} V_g & \xrightarrow{p_2} & V_g \\ & & \downarrow \\ & & H_g \\ \swarrow \pi := p_1 & & \downarrow f \\ & S & \end{array}$$

Dann ist $\pi: X \longrightarrow S$ eine Kurve vom Geschlecht g über S . Nach Definition von H_g sind die $\mathcal{O}_X$ -Moduln $\Omega_{X/S}^{\bullet 3}$ und $\iota^*(\mathcal{O}_P(1))$ lokal über S isomorph. Wegen Lemma (4.9) existiert also ein invertierbarer $\mathcal{O}_S$ -Modul $\mathcal{L}$ mit

$$\Omega_{X/S}^{\bullet 3} \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi^*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \iota^*(\mathcal{O}_P(1)) .$$

Dieser Isomorphismus induziert einen Isomorphismus

$$\pi_*(\Omega_{X/S}^{\bullet 3} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \pi_*(\iota^*(\mathcal{O}_P(1))) .$$

Deshalb sind die projektiven Schemata $P(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\bullet 3}))$ und $P(\pi_*(\iota^*(\mathcal{O}_P(1))))$ kanonisch isomorph (siehe (4.11)). Wegen (4.6) Bedingung iii) induziert der kanonische Homomorphismus

$$\Gamma(P^{5g-6}, \mathcal{O}_{P^{5g-6}}(1)) \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{h} \pi_*(\iota^*(\mathcal{O}_P(1)))$$

Isomorphismen über allen $\kappa(s)$ -wertigen Punkten von S . Deshalb ist er surjektiv, und da beide Garben lokal-frei vom selben Rang $5g-5$ sind auf S , ist h dann auch injektiv. Folglich induziert h einen Isomorphismus

$$P(\pi_*(\iota^*(\mathcal{O}_P(1)))) \longrightarrow P^{5g-6} \times S = P ,$$

insgesamt wird also ein S -Isomorphismus

$$\tilde{f}: P(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\bullet 3})) \longrightarrow P$$

induziert. Man erhält so die Abbildung

$$\psi_1: \text{Hom}(S, H_g) \longrightarrow H_g(S)$$

mit $\Upsilon_1(f) = (\text{Isomorphieklasse von } (S \times_{\mathbb{H}_g} V_g), \tilde{f})$.

Sei nun $\pi: X \longrightarrow S$ mit einem Isomorphismus

$i: \mathbf{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3})) \longrightarrow \mathbf{P}^{5g-6} \times S =: \mathbf{P}$ Repräsentant einer Klasse von $H_g(S)$. Dann existiert eine abgeschlossene Einbettung $\iota: X \longrightarrow \mathbf{P}$, die durch

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota'} & \mathbf{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3})) & \xrightarrow{i} & \mathbf{P} \\ \pi \downarrow & \swarrow p & & & \\ S & & & & \end{array}$$

definiert wird, wobei ι' die zu dem kanonischen surjektiven Homomorphismus $\pi^*(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3})) \longrightarrow \Omega_{X/S}^{\otimes 3}$ gehörende Immersion ist. Man kann also X als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))$ und dann auch von $\mathbf{P}$ auffassen, das auf allen Fasern das Hilbertpolynom $P_g(n) = (6n-1)(g-1)$ hat. Deshalb gibt es genau einen Morphismus $f: S \longrightarrow \underline{\text{Hilb}}_{\mathbf{P}^{5g-6}/Z}^P$, der $\iota(X)$ in $\mathbf{P}$ induziert. Es ist zu zeigen, daß f sich über $\underline{H}_g \subset \underline{\text{Hilb}}_{\mathbf{P}^{5g-6}/Z}^P$ faktorisiert. Offenbar ist $\iota(X)$ eine Kurve vom Geschlecht g über S in $\mathbf{P}$.

Nach Proposition (4.16) sind über jeder Zusammenhangskomponente Z von S die invertierbaren Moduln $i^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))|_{p^{-1}(Z)}$ und $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))}(n)|_{p^{-1}(Z)}$, $n \in \mathbb{N}$, lokal über Z isomorph. Da i ein Isomorphismus ist, muß für die Beschränkungen dieser Moduln auf die Fasern von $\mathbf{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))$ gelten ($s \in S$):

$$\begin{aligned}
 5g-5 &= \dim_{\mathfrak{X}(S)} \Gamma(\mathbb{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))_S, (i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)))_S) \\
 &= \dim_{\mathfrak{X}(S)} \Gamma(\mathbb{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))_S, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))^{(n)}})_S) = \binom{n+5g-6}{5g-6}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt $n = 1$, also sind auf $\mathbb{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))$ die Moduln $i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3}))}(1)$ über S lokal-isomorph. Dann sind auch $i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ und $\Omega_{X/S}^{\otimes 3}$ über S lokal-isomorphe $\mathcal{O}_X$ -Moduln, d.h. Bedingung (4.6) ii) ist erfüllt. Daß $i(X) \subset \mathbb{P}$ auch der Forderung (4.6) iii) genügt, folgt aus dieser lokalen Isomorphie und der Eigenschaft (4.5) c).

Deshalb faktorisiert sich $f: S \longrightarrow \underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{P}}_{5g-6/2}$ nach (4.6) über $\mathbb{H}_g$, so daß

$$i(X) = S \times_{\mathbb{H}_g} V_g \hookrightarrow \mathbb{P}$$

gilt. Wir haben also eine Abbildung

$$\gamma_2: H_g(S) \longrightarrow \text{Hom}(S, \mathbb{H}_g)$$

mit $\gamma_2(\pi: X \longrightarrow S, i: \mathbb{P}(\pi_*(\Omega_{X/S}^{\otimes 3})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}) = f$.

Offenbar ist γ_2 unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten einer Klasse aus $H_g(S)$ definiert. Man prüft jetzt sofort nach, daß γ_1 und γ_2 zueinander invers sind. Da γ_1 und γ_2 verträglich mit Basiserweiterungen $S' \longrightarrow S$ sind, d.h. funktoriell sind, definieren sie eine Isomorphie der Funktoren H_g und $h_{\mathbb{H}_g}$ mit $h_{\mathbb{H}_g}(S) = \text{Hom}(S, \mathbb{H}_g)$. Daraus folgt die Behauptung.

Zum Beweis von (4.10) bleiben noch (4.11) und (4.16) nachzutragen:

(4.11) Lemma: Seien Y ein lokal-noethersches Schema und $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Für jeden quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$ -Modul $\mathcal{E}$ gibt es einen kanonischen Y -Isomorphismus $i_{\mathcal{L}} : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L})$. Weiter sind für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ -Moduln $i_{\mathcal{L}}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})}(n))$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ kanonisch isomorph.

Beweis durch Zurückführen auf die symmetrischen Algebren (vgl. EGA II (4.1.4)).

(4.12) Proposition: Sei X ein Schema über dem lokal-noetherschen Schema Y mit flachem und eigentlichem Strukturmorphismus $f: X \longrightarrow Y$. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei kohärente, lokal-freie $\mathcal{O}_X$ -Moduln und $y \in Y$ mit $H^1(X_y, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)) = (0)$. Dann gibt es zu jedem $\mathcal{O}_{X_y}$ -Homomorphismus $u_y : \mathcal{F}_y \longrightarrow \mathcal{G}_y$ eine offene Umgebung U von y und einen Homomorphismus $u: \mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} \longrightarrow \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}$, der u_y induziert.

Beweis: Es ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kohärenter lokal-freier $\mathcal{O}_X$ -Modul, somit ist er flach über $\mathcal{O}_Y$, und es gilt

$$\mathcal{H}_y = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \kappa(y) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y).$$

Man kann (1.1) c) auf $\mathcal{H}$ anwenden und erhält den kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$(f_*(\mathcal{H}))_y \longrightarrow \Gamma(X_y, \mathcal{H}_y) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y). -$$

Daraus folgt:

(4.13) Korollar: Ist u_y injektiv bzw. surjektiv oder bijektiv, so gilt dies auch für u auf $f^{-1}(U)$ für eine genügend kleine Umgebung U von y .

Beweis: Sei $x \in f^{-1}(y)$. Ist $u_x \otimes 1: \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{Z}(y) \longrightarrow \mathcal{G}_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{Z}(y)$ injektiv, so auch $u_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$, denn $\mathcal{F}_x$ und $\mathcal{G}_x$ sind insbesondere endliche $\mathcal{O}_{X,x}$ -Moduln und $\mathcal{G}_x$ ist flach über $\mathcal{O}_{Y,y}$ (vgl. EGA 0 (10.2.4)). Ist $u_x \otimes 1$ surjektiv, so folgt die Surjektivität von u_x mit dem Lemma von Nakayama. Wegen der Kohärenz des Kerns und des Kokerns von u folgt die Behauptung für eine offene Umgebung von X_y . Da f abgeschlossen ist, kann man sie von der Form $f^{-1}(U)$ wählen.—

(4.14) Korollar: Mit den Bezeichnungen von (4.13) sei $\mathcal{E}_0$ ein kohärenter, lokal-freier $\mathcal{O}_{X_y}$ -Modul, so daß

$$H^1(X_y, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)) = (0)$$

gilt. Sind $\mathcal{F}_y$ und $\mathcal{G}_y$ isomorph zu $\mathcal{E}_0$, dann gibt es eine Umgebung U von y , so daß $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$ und $\mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}$ isomorph sind. (Es wird nicht $H^1(X_y, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)) = (0)$ vorausgesetzt.)

(4.15) Korollar: Sei $f: X \longrightarrow Y$ wie in (4.12), aber zusätzlich werde $H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = (0)$ für ein $y \in Y$ vorausgesetzt. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei invertierbare $\mathcal{O}_X$ -Moduln, so daß $\mathcal{F}_y$ isomorph zu $\mathcal{G}_y$ ist, dann gibt es eine Umgebung U von y mit der Eigenschaft:

$$\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} \cong \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}.$$

Zum Beweis wendet man (4.14) auf $\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}$ und $\mathcal{O}_X$ an mit $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{X_y}$.

Bemerkung: Proposition (4.12) folgt bereits aus einem schwächeren Satz als (1.1) (vergleiche EGA III (4.6.1) bis (4.6.5)).

(4.16) Proposition: Sei Y ein zusammenhängendes lokal-noetherisches Schema und $\mathcal{L}$ ein kohärenter, lokal-freier $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Sei $X = \mathbf{P}(\mathcal{L})$ mit der kanonischen sehr reichen Garbe $\mathcal{O}_X(1)$. Dann ist jeder invertierbare $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{L}$ auf X lokal-isomorph über Y zu einer Garbe $\mathcal{O}_X(n)$ mit eindeutig bestimmtem $n \in \mathbb{Z}$. Es ist $f: X \longrightarrow Y$ der Strukturmorphismus.

Beweis: Der Strukturmorphismus $\mathbf{P}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y$ ist flach. Sei $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$ -Modul. Für $y \in Y$ ist die Faser $X_y = \mathbf{P}(\mathcal{L}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)) = \mathbf{P}^m(\kappa(y))$ mit $m = \dim_{\kappa(y)}(\mathcal{L}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)) - 1$. Wegen $H^1(\mathbf{P}^m(\kappa(y)), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m(\kappa(y))}^*(\kappa(y))) = \mathbb{Z}$ ist die Beschränkung $\mathcal{L}_y$ isomorph zu $\mathcal{O}_{X_y}(n)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Da $H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = (0)$ gilt, folgt aus Korollar (4.15) die Existenz einer offenen Umgebung U von y , so daß $\mathcal{L}|_{f^{-1}(U)}$ isomorph zu $\mathcal{O}_X(n)|_{f^{-1}(U)}$ ist. Nun gilt $\mathcal{L}_y \cong \mathcal{O}_{X_y}(n)$ für alle $y \in Y$. Wegen des Zusammenhangs von Y ist n konstant auf Y . Also sind $\mathcal{L}$ und $\mathcal{O}_X(n)$ lokal über Y isomorphe $\mathcal{O}_X$ -Moduln.—

Wegen Lemma (4.9) folgt daraus sofort:

(4.17) Korollar: Zu jedem invertierbaren $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{L}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{Z}$ und einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten invertierbaren $\mathcal{O}_Y$ -Modul $\mathcal{L}'$, so daß $\mathcal{L} \cong f^*(\mathcal{L}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ ist.

Aus (4.10) folgt unmittelbar die "Verträglichkeit" der Bezeichnungen " ν -kanonisch" und " ν -kanonisch eingebettet":

(4.18) Korollar: Eine Kurve $\pi : X \longrightarrow S$ vom Geschlecht $g \geq 2$ ist genau dann v -kanonisch ($v \geq 3$), wenn es in $\mathbb{P}^{(2v-1)(g-1)-1}_{\text{Spek } \mathbb{Z}}$ S eine zu X isomorphe v -kanonisch eingebettete Kurve über S gibt.

Definiert man den kontravarianten Funktor $\mathcal{M}_g$ von der Kategorie der lokal-noetherschen Schemata in die der Mengen durch

$$\mathcal{M}_g(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von Kurven} \\ \text{über } S \text{ mit dem Geschlecht } g \end{array} \right\}$$

für $g \geq 2$, so ist die dem Funktor $\mathcal{M}_g$ zugeordnete Garbe gerade die, welche zu dem Quotientenfunktor $H_g / h_{\text{PGL}(5g-6)}$ gehört mit $h_{\text{PGL}(n)} = \text{Hom}(\cdot, \text{PGL}(n))$, wobei $\text{PGL}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ ein Gruppenschema über $\text{Spek } \mathbb{Z}$ ist, nämlich das offene Unterschema von $\text{Proj } \mathbb{Z}[a_{00}, \dots, a_{nn}]$, wo $\det(a_{ij}) \neq 0$ gilt. Der Funktor $\mathcal{M}_g$ ist nicht repräsentierbar, es existiert nur ein grobes Modulschema, d.h. es gibt ein Schema $\underline{M}_g$ und einen Morphismus ϕ von dem Funktor $\mathcal{M}_g$ nach $h_{\underline{M}_g}$ mit $h_{\underline{M}_g}(S) = \text{Hom}(S, \underline{M}_g)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle algebraisch-abgeschlossenen Körper K ist die Abbildung

$$\phi(\text{Spek } K) : \mathcal{M}_g(\text{Spek } K) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spek } K, \underline{M}_g)$$

bijektiv.

- (ii) Zu jedem Schema N und jedem Morphismus γ von $\mathcal{M}_g$ nach h_N gibt es genau einen Morphismus $\chi : h_{\underline{M}_g} \longrightarrow h_N$, so daß $\gamma = \chi \circ \phi$ gilt.

Man erhält $\underline{M}_g$ als geometrischen Quotienten von H_g nach $\text{PGL}(5g-6)$.

Diese Theorie über den Funktor $\mathcal{M}_{\mathbf{g}}$ und das grobe Modulschema $\mathbb{M}_{\mathbf{g}}$ ist in [20] Ch. 5 dargestellt.

Mit Hilfe von (4.17) läßt sich eine Umkehrung von (4.11) beweisen:

(4.19) Lemma: Sei Y ein lokal-noethersches Schema und $\mathcal{L}$ ein kohärenter lokal-freier $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Ist $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$ -Modul, so induziert jeder Y -Isomorphismus $\mathbf{P}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F})$ einen $\mathcal{O}_Y$ -Isomorphismus $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}$ für einen invertierbaren $\mathcal{O}_Y$ -Modul $\mathcal{L}'$.

Beweis: Indem man jede Zusammenhangskomponente von Y gesondert betrachtet, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß Y zusammenhängend ist. Sei r ein Y -Morphismus

$$\begin{array}{ccc} X := \mathbf{P}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{r} & \mathbf{P}(\mathcal{F}) \\ p \searrow & & \swarrow q \\ & Y & \end{array}$$

Man kann gemäß EGA II (4.2.3) dem Morphismus r das Paar $(\mathcal{L}_r = r^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{F})}(1)), \varphi_r: p^*(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{L}_r \text{ surjektiv})$ zuordnen. Nun ist mit (4.17) $\mathcal{L}_r \cong p^*(\mathcal{L}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ und einen invertierbaren $\mathcal{O}_Y$ -Modul $\mathcal{L}'$. Nach EGA 0 (5.4.10) und EGA III (2.1.15) gilt:

$$p_*(p^*(\mathcal{L}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} (S_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}))_n,$$

wobei $(S_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}))_n$ die n -te homogene Komponente der symmetrischen $\mathcal{O}_Y$ -Algebra von $\mathcal{L}$ bezeichnet. Der induzierte $\mathcal{O}_Y$ -Homomorphismus

$p_*(\mathcal{F}_r)$, komponiert mit dem kanonischen Homomorphismus
 $\mathcal{F} \longrightarrow p_*(p^*(\mathcal{F}))$ ergibt

$$\psi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} (S_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}))_n.$$

Da r nach Voraussetzung ein Isomorphismus ist, also sich entsprechende Fasern von X bzw. $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ gleiche Dimension haben, folgt, indem man wie im Beweis von (4.10) die Fasern betrachtet, daß $n = 1$ ist. Zur Beschränkung r_y von r auf die Fasern über einem $y \in Y$

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{r_y} & \mathbf{P}(\mathcal{F})_y \\ p_y \searrow & & \swarrow q_y \\ & \text{Spek } \mathfrak{x}(y) & \end{array}$$

gehört der surjektive $\mathcal{O}_{X_y}$ -Homomorphismus (EGA II (4.2.10)):

$$\gamma_{r_y}: p_y^*(\mathcal{F}_y \otimes \mathfrak{x}(y)) = p^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{x}(y) \longrightarrow \mathcal{L}_r \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{x}(y).$$

Indem man auf den $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{L}_r$ den Satz (1.1) anwendet, induziert γ_{r_y} einen $\mathfrak{x}(y)$ -Homomorphismus $\bar{\psi}_y$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_y \otimes \mathfrak{x}(y) & \xrightarrow{\bar{\psi}_y} & (\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L})_y \otimes \mathfrak{x}(y) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ p_{y*}(p_y^*(\mathcal{F}_y \otimes \mathfrak{x}(y))) & \xrightarrow{p_{y*}(\gamma_{r_y})} & p_{y*}(\mathcal{L}_r \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{x}(y)) = \Gamma(X_y, \mathcal{L}_r \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{x}(y)). \end{array}$$

Sei $\dim_{\mathfrak{x}(y)} \mathcal{F}_y \otimes \mathfrak{x}(y) = \dim_{\mathfrak{x}(y)} \mathcal{L}_y \otimes \mathfrak{x}(y) =: m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Es wird gezeigt, daß $\bar{\psi}_y$ ein $\mathfrak{x}(y)$ -Isomorphismus ist: Wegen $p_{y*}(\mathcal{O}_{X_y}) \cong \mathfrak{x}(y)$ ist der kanonische Morphismus $\mathcal{F}_y \otimes \mathfrak{x}(y) \longrightarrow p_{y*}(p_y^*(\mathcal{F}_y \otimes \mathfrak{x}(y)))$ eine

Isomorphie. Es wird φ_{r_y} induziert von dem kanonischen surjektiven $\mathcal{O}_{P(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y))}$ -Morphismus $q_y^*(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y)) \longrightarrow \mathcal{O}_{P(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y))}(1)$, der ausgezeichnete Basiselemente $s_0, \dots, s_m$ von $\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y)$ auf die kanonischen globalen Schnitte von $\mathcal{O}_{P(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y))}(1)$ abbildet. Diese erzeugen $\mathcal{O}_{P(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y))}(1)$ und sind eine $\mathcal{X}(y)$ -Basis von $\Gamma(P(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y)), \mathcal{O}_{P(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{X}(y))}(1))$. Indem man verfolgt, wie diese Basiselemente bzw. Schnitte von den induzierten Homomorphismen φ_{r_y} und $p_{y*}(\varphi_{r_y})$ abgebildet werden, sieht man, daß $p_{y*}(\varphi_{r_y})$ surjektiv ist, also auch ein $\mathcal{X}(s)$ -Isomorphismus ist. Damit folgt die Behauptung über $\overline{\psi}_y$. Andererseits erhält man $\overline{\psi}_y$ auch in natürlicher Weise aus ψ . Somit ist der Homomorphismus in den Halmen

$$\psi_y : \mathcal{F}_y \longrightarrow (\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L})_y$$

surjektiv. Da $\mathcal{F}_y$ endlich und $(\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L})_y$ frei, also flach über $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist, folgt auch die Injektivität von ψ_y . Folglich induziert $r : P(\mathcal{L}) \longrightarrow P(\mathcal{F})$ einen $\mathcal{O}_Y$ -Isomorphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}$. —

§ 5 Überlagerungen des $P^1(k)$ durch Kurven über k
mit minimaler Blätterzahl

Die bisher für Kurven $\pi: X \longrightarrow S$ dargestellten Ergebnisse werden nun auf die universelle 3-kanonisch eingebettete Kurve $V_g \longrightarrow H_g$ angewendet. Wir betrachten jetzt aber alle Schemata über einem fest gewählten algebraisch-abgeschlossenen Körper k , d.h. wir setzen $H_g^\circ = H_g \times_{\text{Spek } \mathbb{Z}} \text{Spek } k$ und $V_g^\circ = V_g \times \text{Spek } k$. Dann sind H_g° und V_g° algebraische k -Schemata.

Ein entscheidendes Hilfsmittel ist ein Satz von Deligne und Mumford (siehe [4]):

(5.1) Satz: Es ist H_g° irreduzibel über k .

Der Beweisgang im ersten Teil von [4] soll hier kurz skizziert werden. Man betrachtet die größere Klasse stabiler Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$, d.h. Kurven, deren geometrische Fasern ganz einfache Singularitäten, nämlich gewöhnliche Doppelpunkte haben dürfen. Ähnlich wie für glatte Kurven konstruiert man das Unterschema H_g^{st} von $\text{Hilb}_{P_g, 3g-4, (k)/k}$ über k der 3-kanonisch eingebetteten stabilen Kurven. Es ist H_g° dicht in H_g^{st} . Es ist zu zeigen, daß H_g^{st} bzw. H_g° irreduzibel ist. Zunächst beweist man, daß keine irreduzible Komponente von H_g^{st} nur aus nicht-singulären Kurven besteht. Hier wird benutzt, daß H_g° , also auch H_g^{st} über einem Körper der Charakteristik 0 irreduzibel ist. Für

diese lange bekannte Aussage gibt es aber nur Beweise mit analytischen Hilfsmitteln (siehe [7] Vol. III, Cap. III, § 34). Dies ist die einzige "analytische" Stelle in dem sonst algebraischen Beweis des obigen Satzes. Wesentliches Hilfsmittel für diesen Beweisschritt ist außerdem das "Stable reduction theorem", angewandt auf Kurven: Seien R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und X eine glatte, geometrisch irreduzible Kurve über K vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann gibt es einen endlich algebraischen Erweiterungskörper L von K und eine stabile Kurve X_L über R_L , dem ganzen Abschluß von R in L , mit allgemeiner Faser $X_{L,\eta} \cong X \times_{\text{Spek } K} \text{Spek } L$.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, daß $S^* = H_g^{\text{st}} \setminus H_g^{\circ}$ zusammenhängend ist. Nun sind die irreduziblen Komponenten von H_g^{st} auch die Zusammenhangskomponente, denn H_g^{st} ist glatt über $\text{Spek } \mathbb{Z}$. Da S^* zusammenhängend ist, aber mit jeder Komponente von H_g^{st} Punkte gemeinsam hat, folgt die Behauptung. Insbesondere ist dann auch das grobe Modulschema $\underline{M}_g^{\circ} = \underline{M}_g \times \text{Spek } k$ irreduzibel.

Wir können jetzt eine Aussage machen über die Existenz bestimmter positiver Divisoren auf einer Kurve über k vom Geschlecht $g \geq 2$.

(5.2) Proposition: Der algebraisch-abgeschlossene Grundkörper k habe eine Charakteristik $\neq 3$. Sei $X \longrightarrow \text{Spek } k$ eine Kurve über k vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann gibt es auf X einen positiven Divisor D mit $\dim D \geq 2$ und

$$\text{grad } D = \begin{cases} \frac{g+2}{2} & , \text{ falls } g \text{ gerade} \\ \frac{g+3}{2} & , \text{ falls } g \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Bemerkung: Die Beschränkung auf $\text{char } k \neq 3$ beruht nur darauf, daß ich keine geeigneten Beispiele von Kurven über k mit $\text{char } k = 3$ gefunden habe. Die Existenz solcher Beispiele ist aber zum Beweis notwendig.

Beweis: Sei $\sigma: V_g^\circ \longrightarrow H_g^\circ$ die universelle, 3-kanonisch eingebettete Kurve über $H_g^\circ \subset \text{Hilb}_{\mathbb{P}^3, 3-(k)/k}$. Dann gibt es wegen (4.8) einen k -wertigen Punkt $\text{Spek } k \longrightarrow H_g^\circ$, so daß X isomorph ist zu dem Faserprodukt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spek } k & \times_{H_g^\circ} & V_g^\circ \longrightarrow V_g^\circ \\ & \downarrow & \downarrow \sigma \\ \text{Spek } k & \longrightarrow & H_g^\circ \end{array} .$$

Offenbar existieren für $\sigma: V_g^\circ \longrightarrow H_g^\circ$ das Schema $\text{Div}_{V_g^\circ/H_g^\circ}^d$ für alle $d \in \mathbb{N}$ und das Unterschema $F_r(V_g^\circ, d)$, das positive Divisoren vom Grad d und der Dimension $\geq r$ parametrisiert (siehe (3.12)). Der Strukturmorphismus $\text{Div}_{V_g^\circ/H_g^\circ}^d \longrightarrow H_g^\circ$ induziert einen Morphismus

$$\chi_r: F_r(V_g^\circ, d) \longrightarrow H_g^\circ .$$

Dieser ist eigentlich (sogar projektiv). In zwei Spezialfällen betrachten wir nun das Bild von $F_r(V_g^\circ, d)$ in H_g° . Es ist ein abgeschlossenes Unterschema von H_g° .

Sei g gerade und $m := (g+2)/2$. Setze zur Abkürzung $Z := F_2(V_g^\circ, m)$ und $\chi := \chi_2: Z \longrightarrow H_g^\circ$. Wir nehmen folgende Aussage als bewiesen an:

(5.2.1) Es gibt einen abgeschlossenen Punkt $z \in Z$ mit

$$\dim (\mathcal{O}_{Z,z} \otimes_{\mathcal{O}_{H_g^0,y}} \mathcal{X}(y)) = 1$$

($y = \chi(z)$), so daß der zu dem H_g^0 -Morphismus $\text{Spek } k \longrightarrow Z$ mit Bildpunkt z gehörende Divisor auf der vom Strukturmorphismus $\text{Spek } k \longrightarrow H_g^0$ mit Bildpunkt y induzierten Kurve genau die Dimension 2 hat.

Wegen Korollar (3.13) ist dann $z \in Z \setminus F_3(V_g^0, m)$, und es folgt nach Proposition (3.16) die Abschätzung

$$\dim Z \geq \dim \mathcal{O}_{Z,z} \geq 1 + \dim H_g^0 .$$

Die Halme in den abgeschlossenen Punkten von $\text{Div}_{V_g^0}^m / H_g^0$ haben alle dieselbe Dimension $m + \dim H_g^0$, denn beide Schemata sind algebraische k -Schemata, H_g^0 ist irreduzibel, und der Strukturmorphismus ist flach. Andererseits gilt wegen (5.2.1):

$$\dim \mathcal{O}_{Z,z} \leq 1 + \dim_y \chi(Z) .$$

Also ist $\dim \chi(Z) \geq \dim H_g^0$, und es ergibt sich, da $\chi(Z)$ abgeschlossen ist, wegen der Irreduzibilität von H_g^0 :

$$\chi(Z) = H_g^0 .$$

Sei jetzt $g \geq 3$ ungerade und $m = (g+3)/2$. Wir setzen

$Z := F_2(V_g^0, m)$ und $\chi := \chi_2 : Z \longrightarrow H_g^0$ und machen folgende Annahme:

(5.2.2) Es gibt einen abgeschlossenen Punkt $z \in Z$ mit

$$\dim (\mathcal{O}_{Z,z} \otimes_{\mathcal{O}_{H_g^0,y}} \mathcal{X}(y)) \leq 2 \quad (y = \chi(z)) ,$$

so daß der Divisor zu z auf der zu y gehörenden Kurve genau die Dimension 2 hat.

Dann gilt ähnlich wie oben:

$$\dim Z \geq \dim \mathcal{O}_{Z,z} \geq 2 + \dim H_g^0$$

wegen (3.16) und

$$\dim \mathcal{O}_{Z,z} \leq 2 + \dim_y \mathcal{X}(Z) .$$

Also ist wieder $\mathcal{X}(Z) = H_g^0$.

Jetzt folgt die Behauptung von (5.2): Ist $y \in H_g^0$ der Bildpunkt des zu $X \longrightarrow \operatorname{Spek} k$ gehörenden geometrischen Punktes $\operatorname{Spek} k \longrightarrow H_g^0$ so ist nach dem eben Bewiesenen $\chi^{-1}(y) \neq \emptyset$ in $F_2(V_{g,m}^0)$ ein über k algebraisches abgeschlossenes Unterschema. Seine k -wertigen Punkte entsprechen umkehrbar eindeutig den positiven Divisoren einer Dimension ≥ 2 und vom Grad

$$m = \begin{cases} (g+2) / 2 & \text{für } g \text{ gerade} \\ (g+3) / 2 & \text{für } g \text{ ungerade} \end{cases}$$

auf $X \longrightarrow \operatorname{Spek} k$.—

Die Richtigkeit der Annahme (5.2.1) und (5.2.2) wird durch Beispiele in § 6 für $\operatorname{char} k \neq 3$ nachgewiesen.

Aufgrund der Beziehung zwischen der Existenz bestimmter Divisoren und Morphismen $X \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ (siehe Einleitung) folgt:

(5.3) Satz: Die Kurve $X \longrightarrow \text{Spek } k$, $\text{char } k \neq 3$ läßt sich mit einer Blätterzahl von höchstens $(g+2)/2$, falls g gerade ist, und höchstens $(g+3)/2$, falls g ungerade ist, dem $\mathbb{P}^1(k)$ überlagern.

Für $g \leq 1$ ergibt sich (5.3) sofort aus dem Satz von Riemann-Roch.

Im folgenden sei stets

$$m = \begin{cases} (g+2)/2, & \text{falls } g \text{ gerade} \\ (g+3)/2, & \text{falls } g \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Man erhält aus den Dimensionsabschätzungen im Beweis zu (5.2) bei $\text{char } k \neq 3$:

(5.4) Korollar: In $F_2(V_g, m)$ gibt es eine irreduzible Komponente Z mit

$$\dim Z = \begin{cases} 1 + \dim H_g, & \text{für } g \text{ gerade} \\ 2 + \dim H_g, & \text{für } g \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Im folgenden wird untersucht, wann sich eine Kurve $X \longrightarrow \text{Spek } k$ mit genau d Blättern dem $\mathbb{P}^1(k)$ überlagern läßt.

Sei $X \longrightarrow \text{Spek } k$ eine Kurve über k (algebraisch-abgeschlossener Körper), $\text{char } k$ beliebig, und D ein Divisor auf X . Es ist die vollständige lineare Reihe von D

$\text{Lin } R(D) = \{D' \mid D' \text{ positiver Divisor auf } X, D' \text{ linear äquivalent zu } D\}$.

Man nennt einen abgeschlossenen Punkt von X , der zu allen Divisoren von $\text{Lin } R(D)$ gehört, Basispunkt von $\text{Lin } R(D)$. Offenbar ist

$$\text{Lin } R(D) = \{D + (f) \mid f \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D)), f \neq 0\}.$$

(5.5) Proposition: Sei $X \longrightarrow \text{Spek } k$ eine Kurve über k und D ein positiver Divisor auf X . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) $\text{Lin } R(D)$ hat keinen Basispunkt.
- ii) Für alle abgeschlossenen Punkte $x \in X$ ist $\dim (D-x) < \dim D$.
- iii) Es gibt ein $f \in L(D)$ mit $N_f = D$. (Es ist $L(D) = \Gamma(X, \mathcal{L}(D))$ und N_f der Nennerdivisor von $f \in R(X)$.)
- iv) Zu jedem $x \in D$ existiert ein $f \in L(D)$ mit $f(x) \neq 0$ und $Z_f \in \text{Lin } R(D)$. (Z_f bezeichnet den Zählerdivisor von $f \in R(X)$.)
- v) $\mathcal{L}(D)$ wird von globalen Schnitten erzeugt.

Beweis: Aus i) folgt ii), denn ist $\dim (D-x_0) = \dim D$ für einen abgeschlossenen Punkt $x_0 \in X$, so ist $v_{x_0}(f) \geq -v_{x_0}(D) + 1$ für alle $f \in L(D)$. (v_{x_0} ist die Bewertung von $\mathcal{O}_{X, x_0}$.) Somit gilt $v_{x_0}((f)+D) \geq 1$ für alle $f \in L(D)$, also ist x_0 ein Basispunkt von $\text{Lin } R(D)$. ii) impliziert iii), denn für alle $x \in D$ ist $L(D-x) \subsetneq L(D)$. Folglich ist auch $\bigcup_{x \in D} L(D-x) \subsetneq L(D)$. Deshalb gibt es ein $f \in L(D)$ mit $v_x(f) = -v_x(D)$ für alle $x \in D$, d.h. $N_f = D$. Aussage iii) ergibt iv), denn das gemäß iii) existierende $f \in L(D)$ hat die in iv) geforderten Eigenschaften für jedes $x \in D$. Aus iv) resultiert v), denn zu $x \in D$ gibt es ein $f \in L(D)$ mit den Eigenschaften aus iv). Deshalb ist $v_x(f) = -v_x(D)$ und $\mathcal{L}(D)_x = f_x \mathcal{O}_{X, x}$. Ist $x \notin D$, so wird $\mathcal{L}(D)$ in x vom Schnitt $1 \in L(D)$ erzeugt. Aus v) erhält man i), denn für jedes $x \in D$ existiert ein $f \in L(D)$ mit $v_x(f) = -v_x(D)$, also ist $x \notin (f) + D \in \text{Lin } R(D)$.—

Mit (5.5) folgt sofort

(5.6) Proposition: Sei $X \longrightarrow \text{Spek } k$ eine Kurve über k . Man kann X dann und nur dann mit genau d Blättern dem $\mathbb{P}^1(k)$ überlagern, wenn es auf X einen positiven Divisor D mit $\dim D \geq 2$ und $\text{grad } D = d$ gibt, dessen vollständige lineare Reihe $\text{Lin } R(D)$ keinen Basispunkt hat.

(5.7) Proposition: Sei $X \longrightarrow \text{Spek } k$ eine Kurve über k vom Geschlecht $g \geq 1$ und $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2g$. Dann läßt sich X immer genau mit der Blätterzahl d dem $\mathbb{P}^1(k)$ überlagern.

Beweis: Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt sofort, daß es auf X einen positiven Divisor D' gibt mit $\dim D' \geq 2$ und $\text{grad } D' = g+1$. Durch Addieren von $d-g-1$ abgeschlossenen Punkten aus X erhält man aus D' einen positiven Divisor D mit $\text{grad } D = d$. Dann ist $\text{Lin } R(D) \neq \emptyset$ und hat keinen Basispunkt, denn es gilt folgendes Lemma:

(5.8) Lemma: Sei $X \longrightarrow \text{Spek } k$ eine Kurve vom Geschlecht g über k und D ein beliebiger Divisor auf X . Ist $\text{grad } D \geq 2g$, so ist $\text{Lin } R(D) \neq \emptyset$ und hat keinen Basispunkt.

Beweis: Wegen $\text{grad } D \geq 2g$ folgt aus dem Satz von Riemann-Roch:

$$\dim D \geq 2g + 1 - g = 1 + g \geq 1.$$

Also ist $\text{Lin } R(D) \neq \emptyset$. Weiter gilt für jedes abgeschlossene $x \in X$ und ein $D' \in \text{Lin } R(D)$:

$$\dim (D'-x) = \text{grad } D' - 1 + 1 - g = \dim D' - 1.$$

Deshalb hat $\text{Lin } R(D)$ keinen Basispunkt.—

Da die Garbe der Kählerschen Differentiale $\Omega_{X/k}$ von ihren globalen Schnitten erzeugt wird, folgt mit (5.5) für eine Kurve $X \longrightarrow \text{Spek } k$ vom Geschlecht $g \geq 2$, denn auch $\mathcal{L}(D)$ wird für $D \in \text{Lin } R(W)$, W ist der kanonische Divisor, von globalen Schnitten erzeugt:

(5.9) Korollar: X läßt sich dem $\mathbf{P}^1(k)$ mit der Blätterzahl $2g-2$ überlagern.

§ 6 Beispiele von Kurven über einem Körper

In diesem Paragraphen werden die zum Beweis der Annahmen (5.2.1) und (5.2.2) notwendigen Beispiele angegeben. Mit k wird wieder der algebraisch-abgeschlossene Grundkörper bezeichnet. Wir müssen geometrische Fasern über $\text{Spek } k \longrightarrow \mathbb{H}_g^\circ$ von $V_g^\circ \longrightarrow \mathbb{H}_g^\circ$ finden, auf denen es positive Divisoren der Dimension ≥ 2 und vom Grad m gibt ($m = (g+2)/2$ bzw. $(g+3)/2$), so daß der Halm der Faser $\text{Spek } k \times_{\mathbb{H}_g^\circ} F_2(V_g^\circ, m)$ in dem Punkt, der diesem Divisor entspricht, gerade die Dimension 1 bzw. ≤ 2 hat. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $V_g^\circ \longrightarrow \mathbb{H}_g^\circ$ ist also eine Kurve $X \longrightarrow \text{Spek } k$ vom Geschlecht $g \geq 2$ zu bestimmen mit einem positiven Divisor der Dimension ≥ 2 und des Grades m , so daß der Halm im zugehörigen Punkt von $F_2(X, m) \subset \underline{\text{Div}}_X^m / \text{Spek } k \cong (X/k)^{(m)}$ die Dimension 1 bzw. ≤ 2 hat. Es ist nämlich $F_2(X, m)$ kanonisch isomorph zu der Faser $\text{Spek } k \times_{\mathbb{H}_g^\circ} F_2(V_g^\circ, m)$, wenn $X \longrightarrow \text{Spek } k$ isomorph zu $\text{Spek } k \times_{\mathbb{H}_g^\circ} V_g^\circ \longrightarrow \text{Spek } k$ ist.

Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt für einen positiven Divisor D vom Grad d auf der Kurve $X \longrightarrow \text{Spek } k$ genau dann $\dim D \geq r$, wenn $\dim(W-D) \geq g+r-1-d$ ist. Es ist $\Gamma(X, \mathcal{L}(W-D))$ der k -Vektorraum der Kählerschen Differentiale auf X , die in den Punkten $x_i \in X$ mindestens von der Ordnung n_i verschwinden, wenn $D = \sum_i n_i x_i$, $x_i \in X$ abgeschlossen, $n_i \in \mathbb{N}$, ist.

Sei nun $D = \sum_{i=1}^d x_i$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, $x_i \in X$ abgeschlossen.

Da $R(X)$ separabel erzeugt ist über k , gibt es eine Basis

$\omega_1, \dots, \omega_g$ von $\Gamma(X, \Omega_{X/k})$ mit $\omega_j = \varphi_j \omega$, $j = 1, \dots, g$, wobei die $\varphi_j \in R(X)$ sind und $\omega \in \Gamma(X, \Omega_{X/k})$ so gewählt wird, daß es in den Punkten x_i , $i = 1, \dots, d$, keine Nullstellen hat.

Da $\Omega_{X/k}$ von globalen Schnitten erzeugt wird, gibt es nämlich

$\tau_i \in \Gamma(X, \Omega_{X/k})$ mit $\tau_i(x_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, d$, und es ist $\omega = \sum_{i=1}^d \alpha_i \tau_i$ mit geeignet gewählten $\alpha_i \in k$. Es gilt

$\dim(W-D) \geq g+r-1-d$ genau dann, wenn der Rang

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_g(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_d) & \dots & \varphi_g(x_d) \end{pmatrix} \leq d+1-r$$

ist. Der Beweis folgt mit der obigen Anmerkung über den k -Vektorraum $\Gamma(X, \mathcal{L}(W-D))$ durch elementare Spaltenumformung.

Man erhält daraus:

(6.1): Sei $D = \sum_{i=1}^d x_i$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, ein Divisor auf $X \rightarrow \text{Spek } k$. Es ist $D \in F_r(X, d)$ genau dann, wenn für den Rang der Matrix

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_g(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_d) & \dots & \varphi_g(x_d) \end{pmatrix} \leq d+1-r$$

gilt.

(6.2): Sei $D = \sum_{i=1}^d x_i$ ein Divisor auf $X \longrightarrow \text{Spek } k$. Es ist

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_g(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_d) & \dots & \varphi_g(x_d) \end{pmatrix} \leq d-1$$

genau dann, wenn $D \in F_2(X, d)$ oder $x_i = x_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \neq j$ gilt.

Daraus folgt, daß außerhalb einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \subset \underline{\text{Div}}_{X/k}^d \cong (X/k)^{(d)}$, die das kanonische Bild der Vereinigung aller "Diagonalen" $Z_{ij} = \{ p_i = p_j, i \neq j \} \subset (X/k)^{(d)}$ ist, wobei p_i die Projektionen sind, die $F_2(X, d) \subset (X/k)^{(d)}$ zugrunde liegende Menge durch die Ungleichung aus (6.2) beschrieben wird.

Bemerkung: Sei $D = \sum_{i=1}^d x_i$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, ein Divisor auf $X \longrightarrow \text{Spek } k$. Dann beschreibt die oben betrachtete Matrix gerade den Homomorphismus von $\mathcal{O}_{\underline{\text{Div}}_{X/k}^d}$ -Moduln

$$u: \varphi^*(\Omega_{\underline{\text{Pic}}_{X/k}^d}) \longrightarrow \Omega_{\underline{\text{Div}}_{X/k}^d}$$

in einer Umgebung des zum Divisor D gehörenden Punktes auf $\underline{\text{Div}}_{X/k}^d$ (vgl. (3.3)). Diesen Punkt bezeichnen wir wieder mit D , seinen Bildpunkt in $\underline{\text{Pic}}_{X/k}^d$ mit $\bar{D}$. Analog zu [21] kann man, ausgehend von der kanonischen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D)/\mathcal{O}_X \longrightarrow 0 ,$$

die k -Vektorräume wie folgt identifizieren:

$$\begin{aligned} \Gamma(X, \mathcal{L}(D)/\mathcal{O}_X) &\cong \text{Hom}_K(\mathfrak{m}_D / \mathfrak{m}_D^2, k) & ([21] \text{ Lect. } 22) \\ H^1(X, \mathcal{O}_X) &\cong \text{Hom}_K(\mathfrak{m}_D / \mathfrak{m}_D^2, k) & ([21] \text{ Lect. } 24, \text{ No. } 2). \end{aligned}$$

Nach Dualisieren ist der kanonische k -Homomorphismus

$$\Gamma(X, \Omega_{X/k}) \longrightarrow \Gamma(X, \Omega_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{L}(D)/\mathcal{O}_X))$$

gerade gleich dem von u bezüglich der obigen Identifikationen induzierten Homomorphismus ([21] Lect. 24, No. 3) und wird nach Wahl der Basis $\gamma_1 \omega, \dots, \gamma_g \omega$ gerade durch die obige Matrix beschrieben.

Diese Matrix ist übrigens auch schon von Brill und Nöther in [3] betrachtet worden (vgl. [14] Bemerkung 6).

Wir kommen nun zu den angekündigten Beispielen. Sie werden als Normalisierungen X' ebener Kurven X angegeben.

(6.3): Beispiel einer Kurve X' über $\text{Spek } k$ vom Geschlecht $g \geq 2$, $g = 2s$, $s \in \mathbb{N}$, mit den Eigenschaften:

- i) Es gibt einen positiven Divisor D mit $\dim D = 2$ und $\text{grad } D = (g+2)/2 = m$.
 - ii) Für den zu D gehörenden abgeschlossenen Punkt $z \in F_2(X', m)$ gilt $\dim \mathcal{O}_{F_2(X, m)} z = 1$.
- Dabei ist k der Grundkörper mit $\text{char } k \neq 3$.

Sei

$$X = \text{Proj } k[X, Y, Z] / (Y^3 \prod_{i=s+2}^{2s+2} (X - a_i Z) - Z^3 \prod_{i=1}^{s+1} (X - a_i Z))$$

mit $a_i \in k$, $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ und $a_i \neq 0$ für alle i . Die Restklassen von X, Y, Z werden mit x, y, z bezeichnet. Es ist $k[x, y, z]$ ein Integritätsbereich. Der rationale Funktionenkörper von X ist $R(X) = k(x/z, y/z)$ mit der Relation

$$(y/z)^3 - \prod_{i=1}^{s+1} (x/z - a_i) / \prod_{i=s+2}^{2s+2} (x/z - a_i) = 0.$$

Somit ist $\{x/z\}$ im Fall $\text{char } k \neq 3$ eine separierende Transzendenzbasis von $R(X)$ über k mit $[R(X) : k(x/z)] = 3$.

(6.3.1): Bei der zur Inklusion $k(x/z) \longrightarrow k(x/z, y/z) = R(X)$ gehörigen Überlagerung $\varphi: X' \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ liegen die Verzweigungspunkte von X' genau über den Punkten $(x/z - a_1), \dots, (x/z - a_{2s+2})$ in $\text{Spek } k[x/z] \subset \text{Proj } k[x/z, z/x] = \mathbb{P}^1(k)$. Dabei bezeichnet X' die Normalisierung von X .

Beweis: Sei $1 \leq i_0 \leq s+1$ und $f = \prod_{i=s+2}^{2s+2} (x/z - a_i)$. Dann ist $V = \text{Spek } k[x/z]_f$ eine offene affine Umgebung von $(x/z - a_{i_0})$. Es ist $\varphi^{-1}(V) = \text{Spek } k[x/z, y/z]_f'$, denn der ganze Abschluß von $k[x/z, y/z]_f$ in $R(X)$ ist auch die Normalisierung von $k[x/z]_f$ in $R(X)$. Über $(x/z - a_{i_0})$ liegt nur das Primideal $(y/z, x/z - a_{i_0})$ in $k[x/z, y/z]_f'$, denn $k[x/z, y/z]_{(y/z, x/z - a_{i_0})}$ ist bereits normal, da sein maximales Ideal ein Hauptideal ist. Wegen $\varepsilon(x/z - a_{i_0}) = (y/z)^3$, ε ist Einheit in $k[x/z]_{(x/z - a_{i_0})}$.

ist X' über dem Punkt $(x/z - a_{i_0})$ in $\mathbb{P}^1(k)$ verzweigt mit dem Verzweigungsindex 3.

Über $k[x/z]_f$ gibt es keine weiteren Verzweigungspunkte von X' . Sei nämlich $b \in k$, $b \neq a_i$, $i = 1, \dots, 2s+2$. Wir betrachten die Primideale über $(x/z - b)$. Es gilt dann

$$(y/z)^3 - \frac{1}{f} \prod_{i=1}^{s+1} ((x/z - b) + (b - a_i)) = 0$$

in $k[x/z]_f[y/z]$. Lokalisieren liefert in $k[x/z]_{(x/z-b)}[y/z]$ die Relation

$$(y/z)^3 - \frac{1}{f} \prod_{i=1}^{s+1} (b - a_i) - \frac{\epsilon}{f} (x/z - b)^\lambda = 0$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 1$ und einer Einheit $\epsilon \in k[x/z]_{(x/z-b)}$.

Setze $\gamma = (1/f) \prod_{i=1}^{s+1} (b - a_i)$. Da k algebraisch-abgeschlossen ist mit $\text{char } k \neq 3$, existieren paarweise verschiedene

$\gamma_j \in k[x/z]_{(x/z-b)}$, $j = 1, 2, 3$, so daß

$$\prod_{j=1}^3 (y/z - \gamma_j) - ((y/z)^3 - \gamma) \in (x/z - b) \cdot k[x/z]_{(x/z-b)}[y/z]$$

ist. Die Relation lautet dann für ein $a \in k[x/z]_{(x/z-b)}[y/z]$

$$\prod_{j=1}^3 (y/z - \gamma_j) - (a + \frac{\epsilon}{f} (x/z - b)^{\lambda-1})(x/z - b) = 0.$$

Daraus folgt, daß in $k[x/z]_{(x/z-b)}[y/z]$ genau die drei verschiedenen Primideale $(y/z - \gamma_j, x/z - b)$, $j = 1, 2, 3$, über $(x/z - b)$ liegen. Da die Lokalisierungen nach diesen Primidealen jeweils diskrete Bewertungsringe sind (das maximale Ideal wird von

$x/z-b$ erzeugt), ist $k[x/z]_{(x/z-b)}[y/z]$ schon die Normalisierung von $k[x/z]_{(x/z-b)}$ in $R(X)$. Wegen $[R(X) : k(x/z)] = 3$ können die Verzweigungsindizes nur jeweils 1 sein, und X' ist unverzweigt über $(x/z-b)$.

Entsprechend zeigt man, daß für $f = \prod_{i=1}^{s+1} (x/z-a_i)$ die Verzweigungspunkte von X' über $\text{Spek } k[x/z]_f$ genau über den Punkten $(x/z-a_{s+2}), \dots, (x/z-a_{2s+2})$ liegen und den Verzweigungsindex 3 haben. Über $\text{Spek } k[x/z] \subset \mathbb{P}^1(k)$ gibt es dann keine weiteren Verzweigungspunkte von $\varphi: X' \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\varphi: X' \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ auch über $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$ unverzweigt ist. In der endlichen Erweiterung $k[z/x]_{(z/x)}[y/x]$ des Halmes $k[z/x]_{(z/x)}$ in ∞ gilt die Relation

$$(y/x)^3 - (z/x)^3 \cdot (\varepsilon/f) = 0$$

mit einer Einheit $\varepsilon \in k[z/x]_{(z/x)}$ und $f = \prod_{i=s+2}^{2s+2} (1-a_i z/x)$. Das einzige Primideal über (z/x) ist $(y/x, z/x) \subset k[z/x]_{(z/x)}[y/x]$. Die endliche Erweiterung

$$k[z/x, y/x]_{(z/x, y/x)}[y/z] \longleftrightarrow k[z/x, y/x]_{(z/x, y/x)}$$

mit der Ganzheitsgleichung $(y/z)^3 - \varepsilon/f = 0$ ist schon die Normalisierung in $R(X)$, denn wie oben gibt es

$\gamma_j \in k[z/x, y/x]_{(z/x, y/x)}$, $j = 1, 2, 3$, $\gamma_i \neq \gamma_j$ für $i \neq j$, so daß für ein $a \in k[z/x, y/x]_{(z/x, y/x)}[y/z]$ mit $y/x = (z/x)(y/z)$ gilt:

$$\prod_{j=1}^3 (y/z - \gamma_j) - a z/x = 0.$$

Die Lokalisierungen nach den drei verschiedenen Primidealen $(y/z - x_j, z/x)$, $j = 1, 2, 3$, sind diskrete Bewertungsringe, und X' ist über ∞ unverzweigt. —

Da alle Verzweigungen von X' zahm sind, läßt sich das Geschlecht von X' nach der Riemannschen Formel berechnen:

$$g = \left(\sum_{x \in X'} (e_{x/\varphi(x)} - 1) \right) / 2 - n + 1 ,$$

x abgeschlossen

dabei bedeutet $e_{x/\varphi(x)}$ den Verzweigungsindex von $x \in X'$ und n die Blätterzahl. Es folgt $g = 2s$.

(6.3.2): Für den Divisor $D = \sum_{i=1}^{s+1} x_i^0$, x_i^0 sind die Verzweigungspunkte von X' über $(x/z - a_1), \dots, (x/z - a_{s+1})$, gilt $\text{grad } D = m$ und $\dim D = 2$.

Beweis: Es ist $\text{grad } D = m$ wegen $m = (2s+2)/2 = s+1$. Die zweite Behauptung beweisen wir mit dem Satz von Riemann-Roch und konstruieren dazu eine Basis von $\Gamma(X', \Omega_{X'/k}) \subset D_k^\infty(R(X))$. Sei

$$\omega = \frac{d(x/z)}{(y/z)^2 \prod_{j=s+2}^{2s+2} (x/z - a_j)} ,$$

$$\omega_i = (x/z)^{i-1} \omega , \quad 1 \leq i \leq s$$

$$\omega_{i+s} = (y/z)(x/z)^{i-1} \omega , \quad 1 \leq i \leq s .$$

Die Differentiale ω , ω_i , ω_{i+s} , $1 \leq i \leq s$, sind alle aus $\Gamma(X', \Omega_{X'/k})$, denn sie haben in den abgeschlossenen Punkten von X' höchstens Nullstellen. Außerhalb der Verzweigungspunkte und der Punkte von X' über 0 bzw. ∞ aus $\mathbb{P}^1(k)$ ist das sicher richtig. In der folgenden Tabelle sind die Null- bzw. Polstellenordnungen einiger Funktionen bzw. Differentiale auf X' in den Punkten von X' über den Punkten $(x/z - a_i) \in \text{Spek } k[x/z] \subset \mathbb{P}^1(k)$, $1 \leq i \leq 2s+2$, und in jeweils nur einem der drei Punkte von X' über $(x/z) \in \text{Spek } k[x/z]$ bzw. $(z/x) \in \text{Spek } k[z/x] \subset \mathbb{P}^1(k)$ aufgetragen. Die diesen Idealen von $k[x/z]$ bzw. $k[z/x]$ entsprechenden Punkte in $\mathbb{P}^1(k)$ sind a_i , $1 \leq i \leq 2s+2$, 0 und ∞ .

Funktion / Differential	a_i $1 \leq i \leq s+1$	a_i $s+2 \leq i \leq 2s+2$	0	∞
x/z	0	0	1	-1
$d(x/z)$	2	2	0	-2
y/z	1	-1	0	0
$\prod_{j=s+2}^{2s+2} (x/z - a_j)$	0	3	0	-(s+1)
ω	0	1	0	s-1
ω_i $1 \leq i \leq s$	0	1	i-1	s-i
ω_{i+s} $1 \leq i \leq s$	1	0	i-1	s-i

Um zu zeigen, daß $\omega_1, \dots, \omega_{2s}$ linear unabhängig sind über k , betrachten wir die von ω_i bzw. $(y/z) \omega_i$, $i = 1, \dots, s$ erzeugten

Unterräume $\Omega_1 = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ und $\Omega_2 = ((y/z)\omega_1, \dots, (y/z)\omega_s)$ von $\Gamma(X', \Omega_{X'/k})$. Die Differentiale $\omega_1, \dots, \omega_s$ bzw. $(y/z)\omega_1, \dots, (y/z)\omega_s$ sind jeweils linear unabhängig wegen der verschiedenen Nullstellenordnungen in den Punkten über 0. Wir zeigen, daß $\Omega_1 \cap \Omega_2 = (0)$ gilt. Angenommen, es gibt ein $\tau \in \Gamma(X', \Omega_{X'/k})$, $\tau \neq 0$ mit $\tau \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Dann ist $\tau = \psi \omega$ für ein $\psi \in R(X)$, $\psi \neq 0$. Wegen $\tau \in \Omega_2$ ist $\psi(x_1^0) = \dots = \psi(x_{s+1}^0) = 0$, wegen $\tau \in \Omega_1$, gilt $\tau = \sum_{i=1}^s \alpha_i \omega_i$, $\alpha_i \in k$, also ist $\psi = \sum_{i=1}^s \alpha_i (x_i/z)^{i-1}$, wobei die α_i nicht alle 0 sind. Folglich ist

$$\text{Rg} \left((x/z)^{i-1} (x_j^0) \right)_{\substack{j=1, \dots, s+1 \\ i=1, \dots, s}} = \text{Rg} \left(a_j^{i-1} \right)_{\substack{j=1, \dots, s+1 \\ i=1, \dots, s}} \leq s-1.$$

Die Matrix (a_j^{i-1}) hat die Vandermondesche Determinante als Minor der Ordnung s . Deshalb folgt wegen $a_i \neq a_j$, $i \neq j$,

$$\text{Rg} \left(a_j^{i-1} \right)_{\substack{j=1, \dots, s+1 \\ i=1, \dots, s}} = s. \quad \text{Widerspruch!}$$

Somit folgt $\Omega_1 \cap \Omega_2 = (0)$. Die Differentiale

$\omega_1, \dots, \omega_s, (y/z)\omega_1, \dots, (y/z)\omega_s$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis von $\Gamma(X', \Omega_{X'/k})$. Es folgt weiter, daß $\{(y/z)\omega_1, \dots, (y/z)\omega_s\}$ eine Basis von $\Gamma(X', \mathcal{L}(W-D))$ ist.

Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt dann

$$\begin{aligned} \dim D &= \text{grad } D + 1 - g + \dim(W-D) \\ &= s + 1 + 1 - 2s + s \\ &= 2. - \end{aligned}$$

Es wird die Isomorphie $\underline{\text{Div}}_{X'/k}^{s+1} \cong (X'/k)^{(s+1)}$ ausgenutzt und bewiesen:

(6.3.3): In dem zu $(x_1^0, \dots, x_{s+1}^0) \in (X'/k)^{s+1}$ gehörenden abgeschlossenen Punkt $[x_1^0, \dots, x_{s+1}^0] \in (X'/k)^{(s+1)}$ hat $F_2(X', s+1)$ die Dimension 1.

Beweis: Es gibt eine offene affine Umgebung $U \subset X'$ der Punkte $x_1^0, \dots, x_{s+1}^0$, die die Verzweigungspunkte von X' über $a_j \in \mathbb{P}^1(k)$, $s+2 \leq j \leq 2s+2$, und die Punkte der Faser $\varphi^{-1}(\infty)$ nicht enthält. Dann ist $V = U \times_{\text{Spek } k} \dots \times_{\text{Spek } k} U \subset (X'/k)^{s+1}$ offen und affin. Es ist $(x_1^0, \dots, x_{s+1}^0) \in V$ und mit jedem Punkt von V ist auch dessen Bahn bezüglich der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{s+1}$ in V . Sei $V = \text{Spek } A$ mit $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X'}) \otimes_k \dots \otimes_k \Gamma(U, \mathcal{O}_{X'})$ ($s+1$ -mal). Die rationalen Funktionen $\psi_i = (x/z)^{i-1}$, $1 \leq i \leq s$, sind aus $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X'})$. Setze zur Abkürzung

$$\alpha(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_s(x)) \in k^s \text{ für } x \in U \text{ abgeschlossen.}$$

Auf der Bahn von $(x_1^0, \dots, x_{s+1}^0)$ hat die Matrix

$$\alpha(x_1, \dots, x_{s+1}) = (\alpha(x_j))_{j=1, \dots, s+1}$$

den Rang s nach dem Bewiesenen. Für einen abgeschlossenen Punkt $(x_1, \dots, x_{s+1}) \in V$ ist $\text{Rg } \alpha(x_1, \dots, x_{s+1}) < s$ genau dann, wenn in $(x_1, \dots, x_{s+1})$ alle Minoren $M_i(x_1, \dots, x_{s+1}) = \det (\alpha(x_j))_{j=1, \dots, s+1, j \neq i}$ von $\alpha(x_1, \dots, x_{s+1})$ der Ordnung s verschwinden. Dabei werden die Minoren über die kanonische Injektion als Schnitte $M_i = \sum (\text{sign } \sigma) \psi_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \psi_{\nu_{i-1}} \otimes 1 \otimes \dots \otimes \psi_{\nu_s} \in A$ für $(\nu_1, \dots, \nu_s) = \sigma(1, \dots, s)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_s$, aufgefaßt. In den

abgeschlossenen Punkten von $V_1 = D(M_1 \cdot \dots \cdot M_{s+1}) \subset V$, d.h. es ist $V_1 = \text{Spek } A_{M_1 \cdot \dots \cdot M_{s+1}}$, sind je s Zeilenvektoren von $\alpha(x_1, \dots, x_{s+1})$ linear unabhängig über k . V_1 enthält mit einem Punkt auch dessen Bahn und schneidet keine Diagonale von $(X'/k)^{s+1}$ (siehe (6.2)). Die gemäß (6.2) zu untersuchende Matrix ist

$$m = \begin{pmatrix} \alpha(x_1) & (y/z)(x_1) \cdot \alpha(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(x_{s+1}) & (y/z)(x_{s+1}) \cdot \alpha(x_{s+1}) \end{pmatrix}$$

Beschränkt auf die Menge der abgeschlossenen Punkte von $V_1 \cap (\bigcup_{1 \leq i, j \leq s+1} p_j^{-1}(x_i^0))$ hat m die Form $(p_j, 1 \leq j \leq s+1$ sind die kanonischen Projektionen):

$$m' = \begin{pmatrix} \alpha(x_1) & (y/z)(x_1) \cdot \alpha(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(x_j) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(x_{s+1}) & (y/z)(x_{s+1}) \cdot \alpha(x_{s+1}) \end{pmatrix}.$$

Angenommen, es ist $\text{Rg } m' < s+1$ in einem abgeschlossenen Punkt $(x_1, \dots, x_{s+1}) \in V_1 \cap (\bigcup_{i,j} p_j^{-1}(x_i^0))$, dann gibt es $\lambda_i \in k$, $i = 1, \dots, s+1$, die nicht alle 0 sind, so daß gilt:

$$\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i \alpha(x_i) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i (y/z)(x_i) \cdot \alpha(x_i) = 0,$$

wobei in der zweiten Summe höchstens s Glieder ungleich 0 sind.

Da je s Vektoren unter den $\alpha(x_i)$, $1 \leq i \leq s+1$, linear unabhängig sind, müssen alle $\lambda_i \neq 0$ sein, also sind alle $(y/z)(x_i) = 0$, $i = 1, \dots, s+1$. Sei $\mathcal{V}$ das in $B = A_{M_1} \dots M_{s+1} = \Gamma(V_1, \mathcal{O}_{(X'/k)}^{s+1})$ von den Minoren der Ordnung $s+1$ von $\mathcal{M}$ erzeugte Ideal. Dann enthält der Durchschnitt in $V_1 = \text{Spek } B$

$$V(\mathcal{V}) \cap \left(\bigcup_{1 \leq i, j \leq s+1} p_j^{-1}(x_i^0) \right) \cap V_1$$

nur endlich viele abgeschlossene Punkte, nämlich die Bahn von $(x_1^0, \dots, x_{s+1}^0)$. Es gilt also

$$\dim(V(\mathcal{V}) \cap \left(\bigcup p_j^{-1}(x_i^0) \right)) = 0,$$

denn in algebraischen k -Schemata (k algebraisch-abgeschlossen) liegt die Menge der abgeschlossenen Punkte dicht.

Andererseits ist $\bigcup p_j^{-1}(x_i^0)$ als Vereinigung endlich vieler Hyperebenen rein s -dimensional. Ist Z_{x^0} eine irreduzible Komponente von $V(\mathcal{V})$ maximaler Dimension durch $x^0 \in \text{Bahn}((x_1^0, \dots, x_{s+1}^0))$, dann folgt für die Dimension des Durchschnitts in $(X'/k)^{s+1}$ (vgl. [15] S. 38):

$$0 = \dim(Z_{x^0} \cap \left(\bigcup p_j^{-1}(x_i^0) \right)) \geq \dim Z_{x^0} + s - (s+1),$$

also

$$\dim Z_{x^0} = \dim_{x^0} V(\mathcal{V}) \leq 1.$$

Das Bild von $V(\mathcal{V})$ unter der kanonischen Projektion

$$\pi: (X'/k)^{s+1} \longrightarrow (X'/k)^{(s+1)}$$

ist $V(\mathcal{V}^{\sigma_{s+1}}) \subset \text{Spek } B^{\sigma_{s+1}}$ mit $\mathcal{V}^{\sigma_{s+1}} = B^{\sigma_{s+1}} \cap \mathcal{V}$.

Es ist $\pi(x^0) = [x_1^0, \dots, x_{s+1}^0]$, $x^0 \in \text{Bahn}((x_1^0, \dots, x_{s+1}^0))$.

Nun ist der induzierte Ringhomomorphismus

$$B^{\sigma_{s+1}} / \mathcal{V}^{\sigma_{s+1}} \longrightarrow B/\mathcal{V}$$

endlich, d.h. $V(\mathcal{V})$ und $\pi(V(\mathcal{V}))$ haben dieselbe Dimension.

In einer offenen Umgebung von $[x_1^0, \dots, x_{s+1}^0]$ sind die Mengen der abgeschlossenen Punkte von $F_2(X', s+1)$ und $\pi(V(\mathcal{V}))$ nach (6.2) gleich. Also folgt

$$\dim_{[x_1^0, \dots, x_{s+1}^0]} F_2(X', s+1) \leq 1.$$

Nach der Abschätzung (3.16) gilt aber $\dim_{[x_1^0, \dots, x_{s+1}^0]} F_2(X', s+1) \geq 1$, denn der zu $[x_1^0, \dots, x_{s+1}^0]$ gehörige Divisor hat genau die Dimension 2. Daraus ergibt sich

$$\dim_{[x_1^0, \dots, x_{s+1}^0]} F_2(X', s+1) = 1$$

und auch

$$\dim \mathcal{O}_{F_2(X', s+1), [x_1^0, \dots, x_{s+1}^0]} = 1. -$$

Weitgehend analog zu (6.3) geben wir nun das für (5.2.2) notwendige Beispiel an (vgl. [19], Satz 33):

(6.4): Beispiel einer Kurve X' über $\text{Spek } k$ vom Geschlecht $g \geq 3$, $g = 2s+1$, $s \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:

- i) Es gibt einen positiven Divisor D mit $\dim D = 2$ und
 $\text{grad } D = (g+3)/2 = m$.

ii) Für den zu D gehörenden abgeschlossenen Punkt $z \in F_2(X', m)$ gilt $\dim \mathcal{O}_{F_2(X', m), z} \leq 2$.

Es ist k mit $\text{char } k \neq 3$ vorausgesetzt.

Sei $X = \text{Proj } k[X, Y, Z] / (Y^3 \prod_{i=s+3}^{2s+2} (X - a_i Z) - Z \prod_{i=1}^{s+2} (X - a_i Z))$ mit $a_i \in k$, $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ und $a_i \neq 0$ für alle i . Die Restklassen von X, Y, Z werden mit x, y, z bezeichnet. Es ist $k[x, y, z]$ ein Integritätsbereich. Für den rationalen Funktionenkörper gilt $R(X) = k(x/z, y/z)$ mit der Relation

$$(y/z)^3 - \prod_{i=1}^{s+2} (x/z - a_i) / \prod_{i=s+3}^{2s+2} (x/z - a_i) = 0.$$

Somit ist $\{x/z\}$ eine separierende Transzendenzbasis von $R(X)$ über k mit $[R(X) : k(x/z)] = 3$.

(6.4.1): Bei der zu $k(x/z) \hookrightarrow R(X)$ gehörenden Überlagerung $\varphi: X' \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ liegen die Verzweigungspunkte von X' genau über den Punkten $(x/z - a_1), \dots, (x/z - a_{2s+2}) \in \text{Spek } k[x/z] \subset \mathbb{P}^1(k)$ und $(z/x) \in \text{Spek } k[z/x] \subset \mathbb{P}^1(k)$. Sie haben alle den Verzweigungsindex 3. Dabei bezeichnet X' die Normalisierung von X .

Der Beweis verläuft ganz entsprechend zu (6.3.1). Eine offene affine Umgebung von $(z/x) \in \text{Spek } k[z/x]$ ist $\text{Spek } k[z/x]_f$ mit $f = \prod_{i=s+3}^{2s+2} (1 - a_i z/x)$. In der ganzen Erweiterung $k[z/x]_f[y/x]$ mit der Relation

$$(y/x)^3 - ((z/x) \prod_{i=1}^{s+2} (1 - a_i z/x)) / f = 0$$

liegt genau das Primideal $(y/x, z/x)$ über (z/x) . Folglich ist X' über (z/x) mit dem Verzweigungsindex 3 verzweigt. —

Die Verzweigungspunkte von X' liegen also über den Punkten $a_1, \dots, a_{2s+2}$ und ∞ von $\mathbb{P}^1(k)$. Für das Geschlecht von X' gilt nach der Riemannschen Formel:

$$g = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{x \in X \\ \text{abgeschlossen}}} (e_{x/\varphi(x)} - 1) \right) - 3 + 1$$

$$= 2s+1.$$

(6.4.2): Für den positiven Divisor $D = \sum_{i=1}^{s+2} x_i^0$, x_i^0 sind die Verzweigungspunkte von X' über $a_1, \dots, a_{s+2}$, gilt $\text{grad } D = s+2 = m$ und $\dim D = 2$.

Beweis: Wir zeigen $\dim D = 2$ mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch. Sei

$$\omega = \frac{d(x/z)}{(y/z)^2 \prod_{j=s+3}^{2s+2} (x/z - a_j)},$$

$$\omega_i = (x/z)^{i-1} \omega \quad i = 1, \dots, s+1$$

$$\omega_{i+s+1} = (y/z)(x/z)^{i-1} \omega \quad i = 1, \dots, s.$$

In der folgenden Tabelle sind wieder die Null- und Polstellenordnungen dieser Differentiale in den Punkten von X' über den Punkten a_j , $j = 1, \dots, 2s+2$, 0 und ∞ von $\mathbb{P}^1(k)$ aufgetragen.

Über 0 ist nur ein Punkt von X' betrachtet.

Funktion / Differential	a_j $1 \leq j \leq s+2$	a_j $s+3 \leq j \leq 2s+2$	0	∞
x/z	0	0	1	-3
$d(x/z)$	2	2	0	-4
y/z	1	-1	0	-2
$\prod_{j=s+3}^{2s+2} (x/z - a_j)^{-1}$	0	-3	0	3s
ω	0	1	0	3s
$1 \leq i \leq s+1: \omega_i$	0	1	$i-1$	$3(s+1-i)$
$1 \leq i \leq s: \omega_{i+s+1}$	1	0	$i-1$	$3(s+1-i)-2$

Die Differentiale ω_i ($1 \leq i \leq s+1$) und ω_{i+s+1} ($1 \leq i \leq s$) sind aus $\Gamma(X', \Omega_{X'/k})$. Sie sind sämtlich linear unabhängig, weil sie in dem Punkt $\varphi^{-1}(\infty) \in X'$ jeweils paarweise verschiedene Nullstellenordnungen haben. Genau wie in (6.3.2) zeigt man, daß $\omega_{s+2}, \dots, \omega_{2s+1}$ eine Basis von $\Gamma(X', \mathcal{L}(W-D))$ bilden. Also gilt

$$\dim D = s+2 + 1 - 2s - 1 + s = 2 .-$$

(6.4.3): In dem zu $(x_1^0, \dots, x_{s+2}^0) \in (X'/k)^{s+2}$ gehörenden abgeschlossenen Punkt $[x_1^0, \dots, x_{s+2}^0] \in (X'/k)^{(s+2)}$ hat $F_2(X', s+2)$ eine Dimension ≤ 2 .

Beweis: Sei $U \subset X'$ offen und affin, $x_1^0, \dots, x_{s+2}^0 \in U$, $\varphi^{-1}(\infty) \notin U$, die Verzweigungspunkte von X' über a_j , $s+3 \leq j \leq 2s+2$ seien nicht

aus U . Dann ist $V = U \times_{\text{Spek } k} \dots \times_{\text{Spek } k} U \subset (X'/k)^{s+2}$ offen und affin, $(x_1^0, \dots, x_{s+2}^0) \in V$, und mit jedem Punkt liegt auch dessen Bahn bezüglich σ_{s+2} in V . Sei $V = \text{Spek } A$ mit $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes_k \dots \otimes_k \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ($s+2$ -mal). Die rationalen Funktionen $\psi_i = (x/z)^{i-1}$, $1 \leq i \leq s+1$, sind aus $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Setze zur Abkürzung für $x \in U$ abgeschlossen

$$\alpha(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_{s+1}(x)) \in k^{s+1}$$

$$\beta(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_s(x)) \in k^s.$$

Auf der Bahn von $(x_1^0, \dots, x_{s+2}^0)$ haben die Matrizen

$$\alpha(x_1, \dots, x_{s+2}) = (\alpha(x_j))_{j=1, \dots, s+2}$$

und

$$\beta(x_1, \dots, x_{s+2}) = (\beta(x_j))_{j=1, \dots, s+2}$$

den Rang $s+1$ bzw. s . Wir beschränken uns wieder auf die offene affine Teilmenge $V_1 = D(M_1 \cdot \dots \cdot M_{s+2} \cdot N_1 \cdot \dots \cdot N_{s+2}) \subset V$, wo alle Minoren der Ordnung $s+1$ von α und der Ordnung s von β nicht verschwinden. Mit einem Punkt liegt auch seine ganze Bahn in V_1 . V_1 schneidet keine Diagonale von $(X'/k)^{s+2}$. Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \alpha(x_1) & (y/z)(x_1) \cdot \beta(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(x_{s+2}) & (y/z)(x_{s+2}) \cdot \beta(x_{s+2}) \end{pmatrix}$$

wird auf $Z_1 := V_1 \cap \left(\bigcup_{\substack{1 \leq i, j, k \leq s+2 \\ i \neq j}} p_k^{-1}(\{x_i^0, x_j^0\}) \right)$ beschränkt.

Sie hat dort die Form

$$m' = \begin{pmatrix} \alpha(x_1) & (y/z)(x_1) \cdot \mathcal{L}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(x_i) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(x_j) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(x_{s+2}) & (y/z)(x_{s+2}) \cdot \mathcal{L}(x_{s+2}) \end{pmatrix} .$$

$\text{Rg } m' < s+2$ in einem abgeschlossenen Punkt $(x_1, \dots, x_{s+2})$ bedeutet die Existenz von $\lambda_i \in k$, $i = 1, \dots, s+2$, die nicht alle 0 sind, mit

$$\sum_{i=1}^{s+2} \lambda_i \cdot \alpha(x_i) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{s+2} \lambda_i (y/z)(x_i) \cdot \mathcal{L}(x_i) = 0 .$$

Da je $s+1$ Vektoren $\alpha(x_i)$ und je s Vektoren $\mathcal{L}(x_i)$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i \neq 0$ für alle i und somit $(y/z)(x_i) = 0$, $i = 1, \dots, s+2$.

Sei $\mathfrak{V}$ das von den Minoren der Ordnung $s+2$ von m in $B = \Gamma(V_1, \mathcal{O}_{(X'/k)^{s+2}})$ erzeugte Ideal. Dann enthält der Durchschnitt $V(\mathfrak{V}) \cap Z_1 \subset V_1$ nur endlich viele Punkte, nämlich die Bahn von $(x_1^0, \dots, x_{s+2}^0)$. Also gilt $\dim(V(\mathfrak{V}) \cap Z_1) = 0$. Als endliche Vereinigung über paarweise Durchschnitte von Hyperebenen in $(X'/k)^{s+2}$ ist $\bigcup_{p_k^{-1}} (\{x_i^0, x_j^0\})$ rein s -dimensional. Es folgt dann für eine irreduzible Komponente Z_{x^0} von $V(\mathfrak{V})$ maximaler Dimension durch $x^0 \in \text{Bahn}(x_1^0, \dots, x_{s+2}^0)$:

$$0 = \dim(Z_{x^0} \cap Z_1) \geq \dim_{x^0} V(\mathfrak{V}) + s - s - 2 .$$

Somit gilt

$$\dim_{x^0} V(\mathcal{J}) \leq 2 .$$

Wie oben ergibt sich weiter

$$\dim_{[x_1^0 \dots x_{s+2}^0]} F_2(X', s+2) \leq 2$$

und

$$\dim \mathcal{O}_{F_2(X', s+2), [x_1^0 \dots x_{s+2}^0]} \leq 2 . -$$

Bemerkung: Der Grundkörper k habe die Charakteristik 3. Dann kann man analog zu (6.3) das Beispiel aus [19], Satz 32, rechnen und erhält eine Kurve X' über $\text{Spek } k$ als Normalisierung von

$$X = \text{Proj } k[X, Y, Z] / (F)$$

mit $F \in k[X, Y, Z]$,

$$F = Z^{2s+2} Y^{s+1} - (X - a_1 Z)(X - a_2 Z)(X - a_3 Z)(X - a_4 Z)^s (X - a_5 Z)^s (X - a_6 Z)^s .$$

Ist s so gewählt, daß 3 kein Teiler von $s+1$ ist, so hat die Normalisierung X' das Geschlecht $g = 2s$ und ist überall zahm verzweigt. Mit diesem Beispiel folgt Satz (5.2) auch für Kurven vom Geschlecht $g = 2s$ mit $3 \nmid (s+1)$ über Grundkörpern der Charakteristik 3.

Auf allen anderen untersuchten Beispielen von zahm verzweigten Kurven über $\text{Spek } k$ mit $\text{char } k = 3$ habe ich entweder keine positiven Divisoren des richtigen Grades mit der Dimension 2 gefunden oder für die ermittelten Divisoren waren die Bedingungen über die Faserdimension nicht erfüllt.

(6.5): Beispiel einer dem $\mathbb{P}^1(k)$ mit minimaler Blätterzahl nicht separabel und wild verzweigt überlagerten Kurve über $\text{Spek } k$.

Sei $\text{char } k = 2$ und $X = \text{Proj } k[X, Y, Z] / (Y^2 Z^2 + \prod_{i=1}^4 (X + a_i Z))$
 mit $a_i \in k$, $a_i \neq 0$, $i = 1, \dots, 4$, $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$, $\sum_{i=1}^4 a_i = 0$.
 Dann hat X in der einzigen Singularität den Halm
 $k[x/y, z/y]_{(x/y, z/y)}$ mit der Relation

$$(z/y)^2 + \prod_{i=1}^4 (x/y + a_i z/y) = 0.$$

In der Kompletttierung rechnet man den Singularitätsgrad $\delta = 2$ aus. Daraus folgt für das Geschlecht der Normalisierung von X nach der Plückerschen Formel:

$$g = \frac{d(d-3)}{2} + 1 - \delta = 1,$$

wobei d der Grad der Kurve X ist. Deshalb gibt es keine Überlagerung von X mit einem Blatt. Die 2-blättrige Überlagerung zu $k(x/z) \hookrightarrow k(x/z, y/z)$ ist aber nicht separabel. Außerdem ist sie über dem Punkt $(x/z + a_1) \in \text{Spek } k[x/z] \subset \mathbb{P}^1(k)$ mit dem Index 2 verzweigt.—

(6.6): Beispiel einer Kurve über k vom Geschlecht g (g gerade) die dem $\mathbb{P}^1(k)$ separabel, aber wild verzweigt mit der Blätterzahl $(g+2)/2$ überlagert ist.

Sei $\text{char } k = 2$. Die Normalisierung X' von

$X = \text{Proj } k[X, Y, Z] / (Y^5 + Z^3(X + a_1 Z)(X + a_2 Z))$ mit $a_1, a_2 \in k$, $a_1 \neq a_2$,
 $a_1, a_2 \neq 0$ hat das Geschlecht 2, denn ihre Überlagerung des
 $\mathbb{P}^1(k)$ zu der Körpererweiterung $k(x/z) \hookrightarrow k(x/z, y/z)$ hat

drei zahme Verzweigungspunkte vom Index 5. Dagegen ist die Überlagerung zu $k(y/z) \hookrightarrow k(x/z, y/z)$ zwar separabel, aber über $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$ wild verzweigt.—

(6.7): Beispiel einer Kurve vom Geschlecht g (g ungerade) über k , die dem $\mathbb{P}^1(k)$ separabel, aber wild verzweigt mit der Blätterzahl $(g+3)/2$ überlagert werden kann.

Sei $\text{char } k = 2$. Die Kurve $X = \text{Proj } k[X, Y, Z] / (Y^3 + Z(X + a_1 Z)(X + a_2 Z))$ mit $a_1, a_2 \in k$, $a_1, a_2 \neq 0$, $a_1 \neq a_2$, $a_1/a_2 \neq 1$ ist normal und hat das Geschlecht 1, denn die Überlagerung zu der Körpererweiterung $k(x/z) \hookrightarrow k(x/z, y/z)$ ist zahm verzweigt mit drei Verzweigungspunkten des Verzweigungsindex 3. Die Körpererweiterung $k(y/z) \hookrightarrow k(y/z, x/z)$ mit der Relation $(x/z)^2 + (a_1 + a_2)(x/z) + a_1 a_2 + (y/z)^3 = 0$ ist separabel, aber über $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$ ist die zugehörige Überlagerung wild verzweigt.—

Literaturverzeichnis

- EGA Grothendieck, A.; Dieudonné, J.: *Eléments de géométrie algébrique*, O-IV, Publ. Math. IHES 4 (1960), 8 (1961), 11 (1961), 17 (1963), 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967)
- [1] Behnke, H.; Sommer, F.: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Berlin 1965
- [2] Bourbaki, N.: *Algèbre commutative*, Paris 1961-1965
- [3] Brill, A.; Nöther, M.: *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Ann. 7 (1874) 269-310
- [4] Deligne, P.; Mumford, D.: *The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus*, Publ. Math. IHES 36 (1969) 75-109
- [5] Duma, A.: *Zur Konkretisierung kompakter Riemannscher Flächen*, Bayer. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. S.-B. 1973, Abt. II, (1974) 87-100
- [6] Eagon, J.A.; Northcott, D.G.: *Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them*, Proc. Royal Soc. London, Ser. A 269 (1962) 188-204
- [7] Enriques, F.; Chisini, O.: *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, II, III 1915, 1918, 1924
- [8] Fulton, W.: *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. Math. 90 (1969) 542-575
- [9] Grothendieck, A.: *Fondements de la géométrie algébrique: Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I-VI*, Séminaire Bourbaki 1959-1961
- [10] — : *Techniques de construction en géométrie analytique I-X*, Sémin. Cartan 13. 1960/61
- [11] Hensel, K.; Landsberg, G.: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen*, Leipzig 1902
- [12] Iversen, B.: *Linear Determinants with Application to the Picard Scheme of a Family of Algebraic Curves*, Springer Lecture Notes No. 174, Berlin 1970

- [13] Kleiman, S.; Laksov, D.: On the existence of special divisors, *Amer. J. Math.* 94 (1972) 431-436
- [14] — ; — : Another proof on the existence of special divisors, *Acta Math.* 132 (1974) 163-176
- [15] Lang, S.: Introduction to algebraic geometry, New York 1958
- [16] Lax, R.F.: On the Dimension of Varieties of Special Divisors, *Trans. American Math. Soc.* 203 (1975) 141-159
- [17] Lipka, M.: Der Satz von Riemann-Roch und der dualisierende Modul für projektive Kurven, Diplomarbeit, Bochum WS 1973
- [18] Martens, H.H.: On the varieties of special divisors on a curve I, II, *J. reine angew. Math.* 227 (1967) 111-120; 233 (1968) 89-100
- [19] Meis, Th.: Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten Riemannschen Fläche, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts, Heft 16, Univ. Münster 1960
- [20] Mumford, D.: Geometric Invariant Theory, Berlin 1965
- [21] — : Lectures on Curves on an Algebraic Surface, Princeton 1966
- [22] — : Introduction to Algebraic Geometry, (preliminary version)
- [23] — ; Kalevi, S.: Introduction to the Theory of Moduli, 5th Nordic Summer-School in Math. Oslo 1970
- [24] Raynaud, M.: Compactification du module des courbes, Sem. Bourbaki 1970/71, Springer Lecture Notes No. 244
- [25] Serre, J.-P.: Groupes algébriques et corps de classe, Paris 1959
- [26] Storch, U.: Vorlesung über algebraische Kurven, Bochum 1972
- [27] Zariski, O.; Samuel, P.: Commutative Algebra, Princeton 1960

Lebenslauf

Am 30.9.1948 wurde ich, Michael Lippa, als erstes Kind des Buchhändlers Joachim Lippa und seiner Ehefrau Helene, geborene Wieczorek in Bochum-Gerthe geboren. Mein Vater verstarb 1952. Seit seinem Tod führt meine Mutter die Buchhandlung alleine weiter. Ich habe noch eine zwei Jahre jüngere Schwester.

Von 1955 bis 1959 besuchte ich die Volksschule in Bochum-Gerthe. Meine Ausbildung wurde fortgesetzt am Heinrich-von-Kleist-Gymnasium in Bochum-Gerthe, an dem ich am 15.7.1967 die Reifeprüfung bestand. Anschließend studierte ich an der Ruhr-Universität Bochum Mathematik und Physik und legte am 26.11.1973 die Diplomprüfung in Mathematik mit dem Nebenfach Physik ab. Ich wurde während meines Studiums von der "Studienstiftung des deutschen Volkes" gefördert und bekam nach dem Examen ein Promotionsstipendium, bis ich am 1.3.1974 eine Stelle als Wissenschaftlicher Assistent (m.d.V.b.) am Mathematischen Institut der Ruhr-Universität antrat. In dieser Zeit entstand unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. U. Storch die vorliegende Arbeit über die minimale Blätterzahl der Überlagerungen des $P^1(k)$ durch Kurven über einem Körper.

Bochum, den 17.1.1977

Michael Lippa

